N° D'ORDRE C.N.R.S. : A.O. 9659

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PROVENCE

(AIX - MARSEILLE I)

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

François LE BERRE

CONTRIBUTION A L'INTERPRETATION DES PHENOMENES EXPLOSIFS SUR LES REACTEURS

Soutenue le 1er Mars 1974 devant la Commission d'Examen

JURY

M. J. HENNEQUIN		Président
MM. M. CADILHAC J.P. MILLOT	}	Examinateurs
M. A. GUILLEMONAT		Membre Invité

N° D'ORDRE C.N.R.S. : A.O. 9659

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PROVENCE

(AIX - MARSEILLE I)

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

François LE BERRE

CONTRIBUTION A L'INTERPRETATION DES PHENOMENES EXPLOSIFS SUR LES REACTEURS

Soutenue le 1er Mars 1974 devant la Commission d'Examen

J U R Y

M.	J. HENNEQUIN	Président
MM.	M. CADILHAC J.P. MILLOT	Examinateurs
M.	A. GUILLEMONAT	Membre Invité

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE PROVENCE

(AIX-MARSEILLE I)

PERSONNEL ENSEIGNANT

(U.E. . Scientifiques)

Professeurs titulaires

MM.	BERTRAND Marcel	Chimie
	BILLARD Pierre	Mathématiques
	BIZOUARD Michel	Physique
	BLANCHARD André	Mathématiques générales
Mme	BLANCHARD Christiane	Mathématiques
MM.	BODIOU Georges	Mathématiques appliquées
	BODOT Aubert	Chimie
	BONNEAU Marcel	Mathématiques
	BOUSQUET Paul	Physique
	CADILHAC Michel	Physique
	CAPELLA Lucien	Minéralogie
	CARPENI Georges	Chimie
	CASAL Pierre	Mécanique rationnelle et appliquée
	CHANTREL Henri	Physique de l'espace
	CHOUTEAU Jacques	Physiologie animale
Mle	CLARION Claire	Mécanique des fluides
MM.	COULON Roger	Physique
	DAVID Jean-Pierre	Physique
	DESNUELLE Pierre	Chimie biologique
	DOUCET Yves	Physique
	DUSSARDIER Michel	Physiologie animale
	FAVRE Alexandre	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
	FEHRENBACH Charles	Astronomie
	FOURES Léonce	Mathématiques
	FRAISSE Roland	Mathématiques
Mme	FURNESTIN Marie-Louise	Biologie animale
MM.	GIRARDIE Adrien	Zoologie
	GOUVERNET Claude	Géologie appliquée
	GUILLEMONAT André	Chimie industrielle
	HERVE Jacques	Electronique
	HUGON Maurice	Psycho-physiologie
	JULG André	Chimie théorique
	KERN Raymond	Minéralogie
	LAFFITTE Marc	Chimie
	MAIRE Jean-Claude	Chimie
	MALE Damien	Physique
	MANDELBROJT Jacques	Physique
	MARCHIS-MOUREN Guy	Chimie biologique
	MERIGOUX Roger	Physique industrielle
	METZGER Jacques	Chimie
	NAUDET Maurice	Chimie des corps gras
	NEGRE Robert	Biologie végétale
	PESTEIL Paul	Physique
	PETIT Roger	Physique
	PHILIP Roger	Physique

MM.	PONS Armand	Botanique
	QUEZEL-EMBRUNAZ Pierre	Botanique
	RASIGNI Georges	Physique
	ROUARD Pierre	Physique générale
	SIDERIADES Leftéri	Physique
	SIMON Claude	Physiologie animale
	SOUGY Jean	Géologie
	SOURIAU Jean-Marie	Méthodes mathématiques de la physique
	SURZUR Jean-Marie	Chimie organique
Mme	TAXY Suzanne	Géologie historique
MM.	TESSIER Fernand	Géologie générale
	TRAYNARD Jean-Claude	Chimie industrielle
	TROMPETTE Jean	Physique
	VALENSI Jacques	Mécanique expérimentale des fluides
	VISCONTI Antoine	Physique théorique
	WAEGELL Bernard	Chimie

Professeurs sans chaire

MM.	AMAR Raymond	Zoologie
	BOREL Fernand	Techniques mathématiques de la physique
	BOUDET Roger	Mathématiques
	CABANE Jean	Chimie
Mle	CHANDEBOIS Rosine	Biologie animale
M.	COMBET Serge	Chimie
Mme	DELACHE Solange	Mathématiques
MM.	DEVEZE Louis	Biologie marine
	FEUGEAS Claude	Chimie
	FOUGEREAU Michel	Biochimie
	GARRON Roger	Physique expérimentale
	GILLET André	Mathématiques
	GILLET Marcel	Physique
	GIUDICELLI Jean	Biologie animale
Mle	GUEIRARD Simone	Pétrographie
MM.	GUENOCHE Henri	Mathématiques appliquées
	GUERMEUR Robert	Physique
	HALBWACHS Francis	Physique
	HENNEQUIN Jacques	Electronique
	MANUCEAU Jérôme	Mathématiques
	MARTINUZZI Santo	Physique
	NEVILLE Pierre	Biologie végétale
Mle	PICHENOT Mathilde	Biologie végétale
MM.	ROMAN Claude	Physiologie animale
	SARDA Louis	Biochimie
Mme	SIRUGUE Madeleine	Physique
MM.	TACHOIRE Henri	Chimie
	VINCENT Emile	Chimie

Maîtres de conférences

MM.	BELAICH Jean-Pierre	Microbiologie
	BENARROCHE Marcel	Physique
	CASALOT André	Chimie
Mle	CATZIGRAS France	Géologie
MM.	CRESP Jean	Biologie animale
	DELAAGE Michel	Biochimie
Mle	DETRAZ Jacqueline	Mathématiques
MM.	FARDOUX Gérard	Mathématiques
	LAVAGNE André	Biologie végétale
	MARTINET Bernard	Mathématiques
	MERDY Henri	Physique
	MOULINS Maurice	Biologie générale
	NOAT Georges	Physiologie végétale
	PATIN Henri	Chimie
	PUJOL Louis	Chimie
	PUJOL Rémy	Psycho-physiologie
	SOUBLIN Jean-Pierre	Mathématiques
	STREIFF Roland	Chimie
	VICENTE Léonardo	Biologie animale

Chargés d'enseignement

MM.	BREUNEVAL Jacques	Mathématiques
	DELEUIL Roger	Physique

Monsieur BOURGEOIS, Directeur de la Sûreté Nucléaire au Commissariat à l'Energie Atomique, et Monsieur AILLOUD, son représentant au Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache, ont bien voulu permettre la préparation de cette thèse dans le cadre des activités du Groupe de Travail de Sûreté des Piles du Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache. Qu'ils trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude.

Ma reconnaissance va à Monsieur TANGUY, Chef du Département de Sûreté Nucléaire et à Monsieur BAILLY, Chef du Service d'Essais de Sûreté, pour le soutien efficace qu'ils m'ont apporté au cours de cette étude.

Je remercie Monsieur le Professeur HENNEQUIN qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury d'examen.

Mes remerciements vont également à Monsieur le Professeur CADILHAC qui a assuré la direction de ces travaux et dont les encouragements m'ont aidé à les mener à bien.

Je tiens à remercier personnellement Monsieur MILLOT, Chef du Groupe de Travail de Sûreté des Piles, pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet d'études, pour les conseils précieux qu'il a pu me donner au cours du déroulement de ce travail et pour les discussions constructives que nous avons eues ensemble.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement pour leur compétence et leur dévouement Messieurs LIEUTAUD, CORTET, SAUSSAIS, ingénieurs à la CISI, qui m'ont aidé et conseillé dans l'aboutissement de cette thèse.

Mes remerciements vont à tout le personnel du SES du Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache et en particulier à tous ceux qui quotidiennement m'ont apporté leur soutien.

Qu'il me soit permis enfin, d'exprimer mes remerciements à ma femme pour sa compréhension et surtout pour les encouragements qu'elle n'a cessé de me prodiguer.

TABLE DES MATIERES

	Pages
NOMENCLATURE	I
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	4
I. - Introduction	4
II. - L'essai destructif sur le réacteur SPERT 1	4
2.1. Les circonstances de l'essai destructif	4
2.2. Conclusions principales de l'essai destructif	5
III. - Les excursions de puissance sur le réacteur CABRI	5
3.1. Objectifs du réacteur	5
3.2. Principaux résultats obtenus	6
IV. - Etudes sur les transferts thermiques	6
4.1. L'ébullition en régime transitoire	6
4.2. Principales conclusions	10
CHAPITRE II- ETUDE THEORIQUE D'UN MODELE REPRESENTANT LA CONTRE-REACTION D'UN REACTEUR SOUMIS A UNE EXCURSION DE PUISSANCE	12
I. - Introduction	12
II. - Cinétique des réacteurs	13
2.1. Généralités	13
2.2. Equations de la cinétique des réacteurs	13
2.3. Recherche d'un modèle de réactivité	14
III. - Phénomènes hydrodynamiques et thermodynamiques dans le canal .	16
3.1. Introduction	16
3.2. Equations de l'hydrodynamique	16
3.3. Ebullition	17
3.4. Détermination du potentiel de vitesses et conditions de pression	21
IV. - Phénomènes thermiques dans une cellule élémentaire	24
4.1. Introduction	24
4.2. Distribution des températures sans perturbation	24
4.3. Distribution des températures avec perturbation	25

Pages

CHAPITRE III - METHODES NUMERIQUES

I. - Introduction 29

II. - Résolution des équations de la cinétique 29

III. - Détermination des températures sans perturbation 31

3.1. Introduction 31

3.2. Méthode de discrétisation 31

3.3. Conditions aux limites 34

3.3.1. Condition pour l'axe de symétrie du canal 34

3.3.2. Conditions à l'interface eau-gaine 34

3.3.3. Conditions à l'interface gaine-combustible 34

3.3.4. Condition pour l'axe de symétrie du combustible. 35

3.4. Système linéaire permettant de déterminer les températures 35

IV. - Détermination du potentiel de vitesses 37

4.1. Introduction 37

4.2. Détermination de la paroi mobile 38

4.3. Résolution du Laplacien $\Delta\Phi=0$ 38

4.4. Détermination des vitesses 41

V. - Détermination des températures avec perturbation 43

5.1. Introduction 43

5.2. Discrétisation des températures dans l'eau 43

5.3. Conditions de transfert en "A_1" 44

5.3.1. Cote où il y a ébullition avec microcouche d'eau 45

5.3.2. Cote où il y a ébullition sans microcouche d'eau 46

5.3.3. Cote où il n'y a pas ébullition 46

5.4. Discrétisation des températures dans la gaine et le combustible 47

5.5. Système linéaire donnant les températures lorsqu'il y a perturbation 48

5.6. Nouvelle formulation des vitesses w_j 49

5.7. Organigrammes succincts des programmes 50

CHAPITRE IV - RESULTATS NUMERIQUES ET RESULTATS EXPERIMENTAUX 53

I. - Introduction 53

II. - Résultats généraux 53

2.1. Rappel de la méthode expérimentale utilisée sur le réacteur CABRI 53

2.2. Présentation des excursions de puissance 54

2.3. Incertitudes sur les données expérimentales 59

2.3.1. Incertitude sur la période d'une excursion de puissance 59

2.3.2. Incertitudes sur le coefficient de vide moyen et le coefficient de température moyen 60

2.3.3. Incertitude sur le coefficient de pondération du volume de vapeur 60

Pages

2.4. Courbes du pic de puissance et de l'énergie dégagée au pic en fonction de l'inverse de la période 61

III. - Résultats théoriques obtenus à partir du modèle d'ébullition en film 62

3.1. Généralités 62

3.2. Excursion de puissance de période 29 ms 63

3.3. Excursion de puissance de période 23,2 ms 69

3.4. Excursion de puissance de période 19,3 ms 75

3.5. Evolution du volume de vapeur en fonction du temps 81

CHAPITRE V - APPLICATION DE LA METHODE A UN ESSAI DESTRUCTIF 83

I. - Introduction 83

II. - Résultats obtenus pour l'essai destructif 83

2.1. Courbes de puissance et d'énergie 83

2.2. Courbes d'évolution du film de vapeur et des pressions. 84

2.3. Evolution du film de vapeur au centre du canal 85

CHAPITRE VI - CONCLUSIONS 88

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 90

ANNEXES

ANNEXE I Caractéristiques du coeur CABRI 91

ANNEXE II Détermination du coefficient de vide moyen et du coefficient de température moyen 93

ANNEXE III Définitions des coefficients b_1, b_2, b_3 98

ANNEXE IV Ebullition 99

ANNEXE V Conditions d'interface entre deux milieux différents 106

ANNEXE VI Détermination des fonctions y(z,t) et e(z,t) 109

ANNEXE VII Transfert d'énergie entre la plaque et l'eau du demi-canal 112

ANNEXE VIII Résolution du Laplacien $\Delta\Phi=0$ 115

ANNEXE IX Discrétisation de l'équation de convection dans l'eau, lorsqu'il y a ébullition 120

ANNEXE X Conditions limites pour le calcul des températures dans l'eau lorsqu'il y a ébullition 129

ANNEXE XI Conditions de transfert d'énergie en A_1 lorsqu'il y a perturbation 132

ANNEXE XII Nouveau calcul des vitesses w, lorsqu'il y a perturbation. 136

NOMENCLATURE

Lettres latines minuscules

a	:	coefficient de vide moyen
a_1	:	coefficient de diffusivité du combustible
a_2	:	coefficient de diffusivité de la gaine
a_3	:	coefficient de diffusivité de l'eau
b_1	:	coefficient de dilatation du combustible
b_2	:	coefficient de dilatation de la gaine
b_3	:	coefficient de dilatation de l'eau
c_1	:	capacité calorifique du combustible
c_2	:	capacité calorifique de la gaine
c_3	:	capacité calorifique de l'eau
c_T	:	coefficient de température moyen
e	:	épaisseur de la microcouche d'eau
e_o	:	valeur initiale de l'épaisseur de la microcouche d'eau
e_1	:	demi-épaisseur du combustible
e_2	:	épaisseur de la gaine
e_3	:	demi-largeur du canal
g	:	accélération de la pesanteur
h	:	pas en x dans l'eau
h_1	:	pas en x dans le combustible
h_2	:	pas en x dans la gaine
k	:	pas en z
l	:	hauteur d'une plaque de combustible
t	:	temps
u	:	composante horizontale du vecteur-vitesse
w	:	composante verticale du vecteur-vitesse
x	:	abscisse
y	:	épaisseur de vapeur
z	:	ordonnée

Lettres latines majuscules

A	:	surface latérale d'une plaque de combustible
A_1	:	abscisse de la frontière canal-gaine
A_2	:	abscisse de la frontière gaine-combustible
A_3	:	abscisse de l'axe de symétrie du combustible
C_j	:	concentrations de précurseurs de neutrons retardés (j=1, ... 6)
C_{jo}	:	valeurs initiales des C_j

C_p : capacité calorifique de la vapeur d'eau à pression constante
E_m : énergie dégagée au pic de puissance
$\mathcal{L}$: chaleur de vaporisation de l'eau
M : masse moléculaire de l'eau
N_p : nombre de plaques de combustible
P : pression
P_o : pression en bas du canal quand il n'y a pas ébullition
P* : facteur de conversion d'unités
$\mathcal{P}$: puissance moyenne du réacteur
$\mathcal{P}_o$: puissance moyenne initiale du réacteur
$\mathcal{P}_m$: pic de puissance
R : constante des gaz parfaits
S : source de chaleur
T_1 : température dans le combustible
T_2 : température dans la gaine
T_3 : température dans le modérateur
T_i : température initiale
T_p : température de plaque
T_s : température de saturation
V : vecteur vitesse
X : abscisse de la frontière mobile canal-vapeur
X_o : valeur initiale de X lorsqu'apparaît l'ébullition

Lettres grecques

α : inverse de la période τ
β : nombre total de précurseurs de neutrons retardés
β_j : proportion de précurseurs de neutrons retardés du groupe j (j=1,...6)
δ : longueur d'extrapolation des neutrons thermiques dans l'eau
δt : pas en temps
Φ : potentiel de vitesse
Φ_Γ : valeur du potentiel de vitesse sur la paroi mobile Γ
γ : coefficient de pondération du volume de vapeur
Γ : frontière mobile canal-vapeur
Λ : temps de vie moyen des neutrons dans le réacteur
λ_1 : coefficient de diffusion de la chaleur dans le combustible
λ_2 : coefficient de diffusion de la chaleur dans la gaine
λ_3 : coefficient de diffusion de la chaleur dans l'eau
λ_j : constantes de décroissance radioactive des précurseurs des neutrons retardés (j=1,...6)
$\tilde{\rho}$: réactivité en fonction du temps
$\tilde{\rho}_o$: réactivité initiale introduite
ρ : masse spécifique
σ : tension superficielle
θ : angle de mouillage
τ : période de l'excursion de puissance

Indices

i	:	caractérise l'abscisse x
j	:	caractérise l'ordonnée z
ℓ	:	relatif au liquide
n	:	caractérise le temps t
n_1	:	nombre de points dans le combustible en x
n_2	:	nombre de points dans la gaine en x
n_I	:	nombre de points dans l'eau en x
n_k	:	nombre de points en ordonnée
N	:	nombre de points dans l'eau en x
v	:	relatif à la vapeur

INTRODUCTION

La réalisation de centrales nucléaires de grande puissance a nécessité la construction de piles expérimentales destinées à l'étude des matériaux et des combustibles susceptibles de constituer ces centrales nucléaires. Depuis un certain nombre d'années, le Commissariat à l'Energie Atomique a fait choix, pour ces piles expérimentales de réacteurs à eau ordinaire, type piscine utilisant des éléments à plaques d'aluminium et à uranium enrichi. Les raisons de ce choix sont essentiellement, en plus de considérations économiques favorables, la souplesse d'emploi de ces réacteurs, leurs possibilités d'irradiation sous flux neutronique relativement important et leurs grandes facilités offertes à l'expérimentation. Le bon fonctionnement de plusieurs piles piscine construites en France : Pégase, Siloé, Osiris, traduit bien l'excellent comportement de ce type de réacteur.

Cependant malgré les nombreux avantages de ces réacteurs, les problèmes de sûreté les concernant apparaissent comme primordiaux; la facilité d'accès au coeur peut être une source d'accidents de réactivité et les caractéristiques physiques des éléments sont un facteur de fragilité du coeur en cas d'accident de réactivité ou de refroidissement, l'aluminium possédant une résistance mécanique faible et un point de fusion peu élevé. La nécessité de mieux connaître l'ensemble de ces problèmes de sûreté a été mise en évidence par les accidents survenus aux réacteurs américains, BORAX, SL1 et SPERT 1. Ces accidents et surtout celui de SPERT 1 en 1963 ont alors ouvert une ère de recherches spécifiquement orientées vers la compréhension de leurs mécanismes. C'est dans le but d'étudier ces problèmes de sûreté que le réacteur CABRI a été construit. Le coeur de ce réacteur, immergé dans une cuve pleine d'eau est constitué d'éléments combustibles à plaques entre lesquelles circule ou non l'eau de refroidissement. Cette eau de refroidissement joue aussi le rôle de modérateur.

Le premier problème de sûreté abordé expérimentalement sur CABRI a été l'accident de réactivité. Le réacteur, maintenu à une puissance faible, subit brusquement par éjection de barres absorbantes, un apport pratiquement instantané de réactivité. Sa puissance croît alors exponentiellement et est limitée par un ensemble de phénomènes thermiques, thermodynamiques et hydrodynamiques qui créent une contre-réactivité.

Les élévations de température, provoquent dans le combustible, une modification du spectre d'absorption des neutrons (effet Doppler) qui semble négligeable pour les réacteurs type piscine. Mais surtout ces mêmes élévations de températures créent des phénomènes de dilatations, ou de variations de masse spécifique, allant jusqu'à la vaporisation de l'eau. Ils constituent les contributions essentielles à la contre-réactivité. Ce sont ces réalités physiques que nous avons tenté d'élucider à l'aide d'un modèle mathématique de contre-réactivité.

En particulier, s'il est aisé de prendre en considération les phénomènes de dilatations, il est plus délicat de tenir compte des phénomènes d'ébullition. Les conceptions classiques concernant l'ébullition sont difficiles à appliquer car nous avons affaire, lors d'une excursion de puissance, à des transferts thermiques rapides. Les nombreuses études entreprises, au sujet de ces transferts thermiques rapides, nous ont convaincu que leur mécanisme devait donner une explication à l'explosion de SPERT 1. Ayant comme support les excursions de puissances réalisées sur le réacteur CABRI, nous nous devions d'utiliser ces expériences pour mettre au point un modèle d'ébullition tenant compte de ces transferts thermiques rapides.

Notre modèle, suggéré par les travaux de M. Myer [6], est un schéma d'ébullition en film. Il nous permet de mettre en évidence l'effet de marteau d'eau qui se produit lors d'accidents de réactivité dans un réacteur. Cet effet de marteau d'eau, qui consiste en une mise en contact brutale de l'eau du canal avec la paroi chauffante, provoque l'apparition de pics de pression au sein du réacteur et par là explique clairement l'essai destructif de SPERT 1.

Plus précisément, notre modèle considère les phénomènes d'ébullition comme une perturbation troublant le régime hydraulique existant dans le canal, où chaque particule d'eau a deux composantes de vitesses. La mise en équation de ce schéma conduit à la résolution d'un Laplacien sur un domaine dont le contour évolue au cours du temps. Le couplage des phénomènes thermiques et mécaniques donne des évolutions de film de vapeur, qui mettent bien en évidence les instants d'assèchement de la paroi chauffante, correspondant à l'effet de marteau d'eau. De ce point de vue notre modèle est très satisfaisant et tient bien compte des effets de transferts thermiques rapides qui se produisent, lors des excursions de puissance, quelques dizaines de millisecondes après l'ébullition commençante. Cette limite en temps, suffit à donner une bonne explication de l'essai destructif de SPERT 1, et correspond bien au but que nous nous étions fixé. Le schéma que nous avons adopté n'interprète donc que partiellement l'ensemble des excursions de puissance effectuées sur le réacteur CABRI. Il ne peut, notamment, décrire les événements postérieurs à une excursion de puissance et, en particulier, l'équilibre atteint par la convection naturelle.

Notre étude comportera cinq parties essentielles :

— Dans la première partie, notre attention s'est portée sur l'ensemble des principales recherches effectuées dans le monde, sur les aspects thermiques et hydrodynamiques des excursions de puissance réalisées dans les réacteurs, ainsi que sur les efforts expérimentaux faits hors piles concernant les transferts thermiques rapides.

— Dans la seconde partie, nous donnons l'exposé théorique de notre modèle servant en partie à l'interprétation des excursions de puissance. Les différents phénomènes hydrodynamiques, thermodynamiques et thermiques y sont détaillés avec le plus grand soin.

— La troisième partie donne l'ensemble des méthodes numériques utilisées pour le traitement en machine de notre problème.

— Dans la quatrième partie, nous confrontons les résultats théoriques et les résultats expérimentaux obtenus sur les excursions de puissance effectuées sur le réacteur CABRI.

De plus, nous mettons en évidence l'apparition de l'effet de marteau d'eau qui explique l'accident explosif de SPERT 1.

— La cinquième partie est une application de notre modèle à un essai destructif.

— Enfin dans la sixième partie, nos conclusions montrent ce que notre étude a apporté dans la compréhension des transferts thermiques rapides et indiquent dans quelle voie, il est nécessaire de poursuivre des recherches.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I. - INTRODUCTION

Dans ce premier chapitre nous rassemblons les principaux résultats obtenus à partir des recherches effectuées à ce jour sur les réacteurs réfrigérés et modérés à l'eau légère, faiblement pressurisés. Depuis les essais destructifs de SPERT 1 de nombreuses études ont été entreprises; nous ne retiendrons que les principales afin de bien délimiter nos problèmes qui sont, par l'intermédiaire de l'interprétation des excursions de puissance sur les réacteurs, d'élucider les phénomènes de transferts thermiques rapides.

Dans une première partie, nous rappelons brièvement les circonstances des essais destructifs de SPERT 1 et les conclusions qu'il a été possible d'en tirer. La seconde partie fixera le rôle du réacteur CABRI dans ces recherches. La troisième partie sera une brève revue des études entreprises sur les transferts thermiques et en particulier sur l'ébullition en régime transitoire. En résumant les principales conclusions sur les transferts thermiques rapides, nous espérons situer notre étude dans l'ensemble des résultats déjà acquis.

II. - L'ESSAI DESTRUCTIF SUR LE REACTEUR SPERT 1

2.1. - Les circonstances de l'essai destructif

Pour comprendre les mécanismes destructifs pouvant intervenir sur les coeurs à plaques, refroidis à l'eau légère, un programme d'essais transitoires a été lancé aux Etats-Unis sur le réacteur SPERT 1 (Special Power Excursion Reactor Test). Ce réacteur est non pressurisé, hétérogène réfrigéré et modéré à l'eau légère, utilisant des éléments combustibles en uranium 235 enrichi à 93 % (type MTR).

Les accidents survenus à BORAX et SL 1 nécessitaient un ensemble d'études plus systématiques. C'est pourquoi, une série de tests, dans lesquels l'excès de réactivité introduit allant croissant pour chacun d'eux, a été entreprise sur SPERT 1. Le programme prévoyait de plus un essai destructif.

Jusqu'à une période de 7 ms, les dommages causés au coeur se réduisaient à la torsion de quelques parties de plaques situées au centre de celui-ci. Lors d'excursions de puissance de période 5 ms et 4,6 ms, la fusion des plaques apparaissait au centre du coeur (5 % des plaques fondues pour 4,6 ms) mais aucun pic de pression de grandeur

excessive n'était mis en évidence. L'essai destructif était alors préparé dans le but d'obtenir une fusion du coeur à 40 % et des températures de plaques entre 1000°C et 1700°C. La température de 1000°C assurait la fusion (température de fusion de l'aluminium 660°C), la température de 1700°C est la température pour laquelle la réaction chimique aluminium-eau est la plus rapide. Ces conditions nécessitaient l'introduction d'une réactivité initiale de 3,5 dollars, correspondant à une période de 3,3 ms. Le pic de puissance prévu était de l'ordre de 2,3 10^3 MW tandis que l'énergie totale dégagée était estimée à 33 MJ. Une excursion de puissance typique se produisait, la puissance passant par un maximum et se limitant d'elle-même. Cependant 15 ms après le pic de puissance, un pic de pression intervenait bien avant que le combustible n'ait atteint une température suffisante pour vaporiser l'aluminium et détruisait le réacteur. Cette explosion prématurée a hélas eu pour conséquences, la perte d'un certain nombre d'informations.

Néanmoins, l'analyse des premiers renseignements obtenus [1] tentait d'expliquer le pic de pression par l'existence d'une réaction chimique entre l'aluminium et l'eau. Cependant l'estimation des températures atteintes par le métal pendant l'excursion de puissance montre que la réaction chimique n'est probablement pas à l'origine de l'explosion. Il est plus vraisemblable que la réaction chimique n'ait eu lieu qu'après un mécanisme de dispersion de métal fondu, favorisant cette réaction chimique, qui n'a fait que contribuer à la sévérité de l'explosion.

2.2. - Conclusions principales de l'essai destructif

Nous venons de voir qu'une simple réaction chimique métal-eau ne semblait pas devoir expliquer l'explosion du réacteur SPERT 1. Il fallait pourtant justifier la pression destructive observée et expliquer le mécanisme qui se trouve à l'origine de la dispersion du métal fondu. Les résultats d'expériences entreprises sur la dispersion d'aluminium fondu par jet d'eau froide ou l'hypothèse de simple mise en pression du coeur par ébullition n'ont pu donner une justification satisfaisante des hautes pressions atteintes dans SPERT 1. Les recherches ont alors porté sur les transferts thermiques rapides pour expliquer la création d'un film de vapeur instable les plaques : instabilité qui a pour conséquence la mise en contact brutal de l'eau froide avec le métal en fusion. Le choc induit par cette mise en contact (marteau d'eau) semble être à l'origine des pics de pression importants et de la dispersion du métal fondu dans l'eau. Pour vérifier ces hypothèses, la plupart des expériences effectuées sur SPERT (sauf l'essai destructif) ont été reprises sur le réacteur CABRI.

III. - LES EXCURSIONS DE PUISSANCE SUR LE REACTEUR CABRI

3.1. - Objectifs du réacteur

Le but de la construction de ce réacteur était de poursuivre les études de sûreté - notamment de définir de façon aussi précise que possible les effets nucléaires, thermiques et mécaniques engendrés par des régimes transitoires figurant des accidents sur

des piles modérées à l'eau légère [2].

Les régimes transitoires consécutifs à des introductions de réactivité en échelon ou en rampe, permettent d'examiner le comportement d'éléments combustibles, celui des appareils de contrôle et de commandes de pile en général, mais surtout de définir les bases de recherche théorique pour mieux comprendre les phénomènes d'excursions. L'influence des coefficients de vide et de température, ainsi que des paramètres hydrauliques a été systématiquement étudiée. Les phénomènes d'ébullition, intervenant lorsque la période d'excursion est suffisamment faible, n'ont pu être examinés que globalement, en tentant de préciser les limites au-delà desquelles les risques d'explosion deviennent non négligeables.

3.2. - Principaux résultats obtenus

Nous ne retiendrons que les résultats relatifs aux excursions de puissance. Ces résultats sont tout à fait identiques à ceux obtenus à SPERT. Suivant la réactivité introduite dans le coeur du réacteur, la puissance croît exponentiellement, passe en général par un maximum et se stabilise sous l'effet de la contre-réactivité. Cette contre-réactivité provient des phénomènes de dilatation, et des phénomènes d'ébullition si la période est au moins inférieure à 30 ms. Lorsqu'il n'y a pas d'ébullition, l'influence de la pression (hauteur d'eau au-dessus du coeur) est faible. Un modèle de réactivité peut être facilement élaboré lorsqu'il n'y a pas de circulation, en ne tenant compte que des phénomènes de dilatation [3]. Dès que les phénomènes d'ébullition peuvent se produire, il est nécessaire de réenvisager ces problèmes et en particulier de tenir compte des variations de pressions. Celles-ci sont alors engendrées, lors de transitoire de puissance, par les phénomènes de transferts thermiques rapides.

IV. - ETUDES SUR LES TRANSFERTS THERMIQUES

Les conclusions tirées de l'essai destructif de SPERT 1, confirmées en partie par l'ensemble des excursions faites sur CABRI, devaient amener la plupart des laboratoires à diriger leurs recherches sur les phénomènes de transferts thermiques rapides. En particulier, il devenait nécessaire de reprendre des études fondamentales sur l'ébullition en régime transitoire.

4.1. - L'ébullition en régime transitoire

L'ébullition en régime transitoire est tout à fait différente de l'ébullition en régime permanent. Elle engendre en général des déplacements d'eau, créant une formation rapide de vapeur, laquelle peut provoquer des pics de pression importants. Ces variations brusques de pressions influent directement sur les phénomènes d'ébullition. Le "Space Technical Laboratory" a entrepris une étude en capsule qui permet d'étudier l'ébullition sur un disque de matière fissile [4] et [5]. Cette capsule était constituée essentiellement de trois parties : une chambre contenant un disque d'aluminium-uranium entouré d'eau, un piston solidaire d'un axe dont le déplacement sert à mesurer le volume

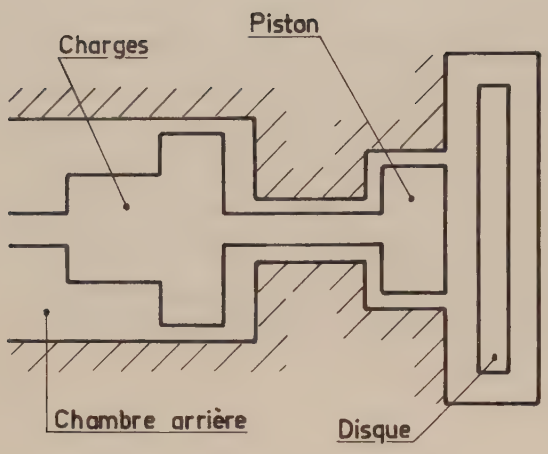

Figure 1

de vide dans la chambre expérimentale et une chambre arrière qui permet par un système de charges de définir la pression initiale dans la chambre expérimentale lors de chaque essai.

Cette capsule (fig. 1) placée dans le réflecteur du réacteur KEWB permet de chauffer, par fissions, le disque lors d'excursions de puissance allant de quelques millisecondes à une milliseconde.

La figure 2 reproduit les enregistrements obtenus, température, pression et évolution du volume de vide par unité de surface ainsi que la puissance pendant une excursion de puissance de période 5 ms. La pression initiale était la pression atmosphérique à laquelle était ajoutée une surpression de 30 g/cm^2. Les conditions expérimentales correspondent bien à un réacteur faiblement pressurisé. L'ensemble de ces phénomène peuvent être interprétés de la façon suivante : la température du disque croît au début de l'excursion de puissance, tandis que la pression (1) croît elle aussi sous l'influence de l'ébullition nucléée. L'ébullition nucléée se transforme en ébullition en film (pression 2) et une couche de vapeur se forme faisant chuter la pression (pression 3). Pendant ce temps le volume de vide (1 et 2) a une allure parabolique. La condensation du film de vapeur (volume de vide 3) provoque un pic de pression (pression 4) et le phénomène devient pseudo-périodique. La puissance du réacteur finissant par baisser pression et volume de vide reviennent à leur point de départ.

L'ensemble de ces phénomènes sont identiques lorsqu'on opère à une pression initiale de l'ordre de 10 atmosphères.

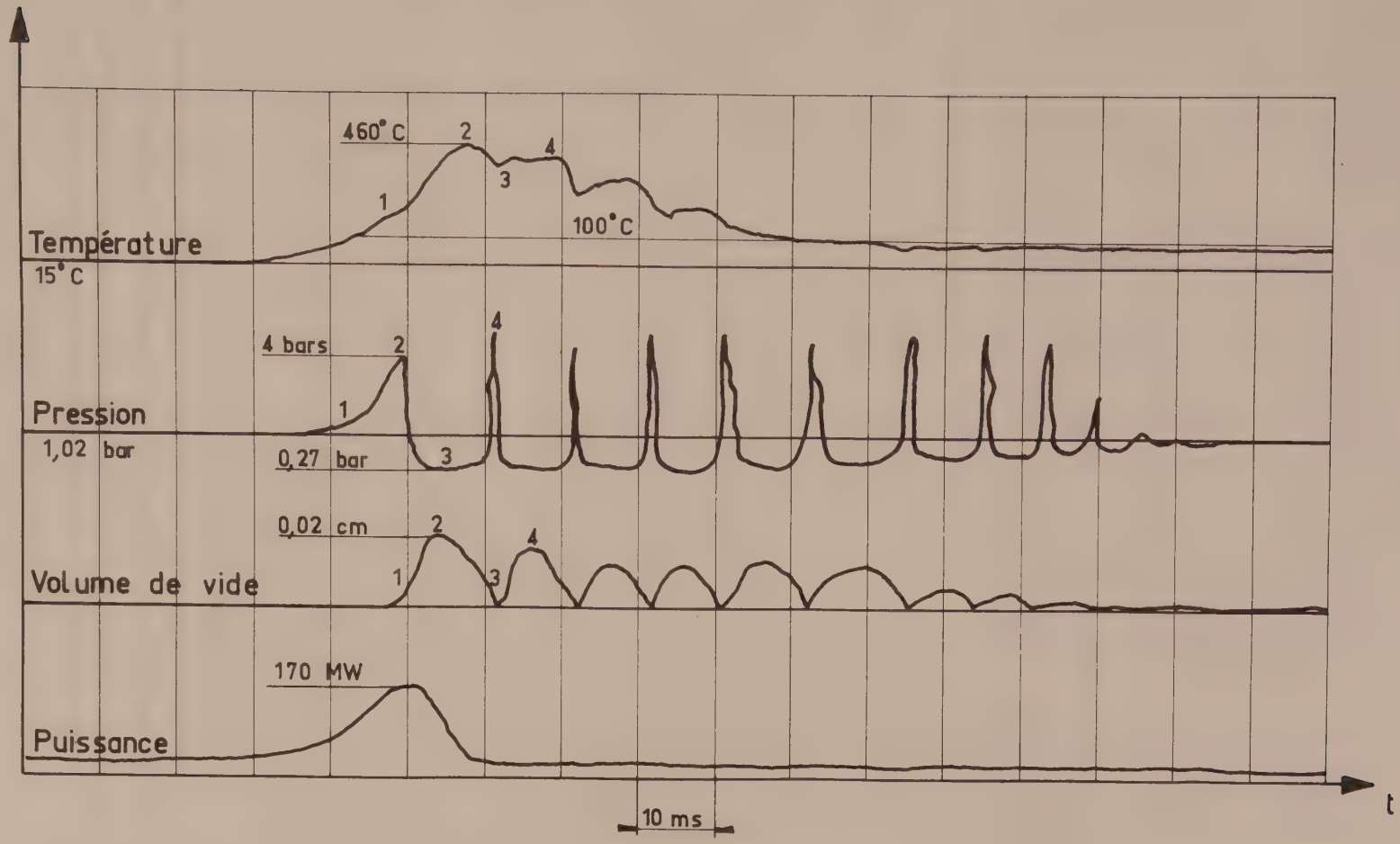
460°C
2
4
3
1
Température
100°C
15°C
4 bars
2
4
1
Pression
1,02 bar
0,27 bar
3
0,02 cm
2
4
1
3
Volume de vide
170 MW
Puissance
10 ms
t

Figure 2

Ces expériences réalisées en capsule ont été reprises par le Service des Transferts Thermiques de Grenoble. Une simulation a été faite en vraie grandeur dans la boucle CABRIOLE [6]. Cette boucle est la réalisation d'un canal de réacteur, chauffé électriquement. Les géométries rectangulaire ou cylindrique ont été envisagées. Nous nous intéresserons plutôt à la géométrie rectangulaire car le canal réalisé avait les caractéristiques d'un canal de SPERT 1 :

longueur chauffante	: 600 mm
épaisseur des plaques d'aluminium	: 0,75 mm
distance entre deux plaques chauffantes	: 2,9 mm

A chaque essai, la puissance était dégagée sous forme d'un créneau. Schématiquement, les principales mesures faites étaient les suivantes :

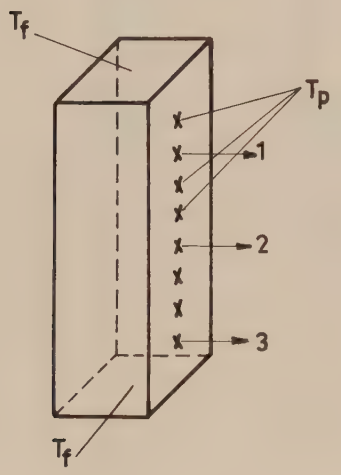

Figure 3

Mesures de températures :

- température de paroi sèche tous les 6 cm,
- température du fluide à l'entrée et à la sortie du canal.

Mesures de pressions à l'entrée et à la sortie du canal et aux points 1, 2,

Mesures de taux de vide par absorption de rayons X en ces mêmes points 1, 2, 3.

Les mesures faites au centre du canal (point 3) retiendront notre attention. Nous donnons figure 4, un ensemble d'enregistrements concernant la pression, la température de plaque et le taux de vide lors d'un essai caractéristique. Rappelons que le taux de vide α est le rapport du volume de vapeur, au volume total d'eau et de vapeur dans une section donnée d'un écoulement diphasé.

Les résultats expérimentaux sont tout à fait analogues à ceux obtenus au STL. Le premier pic de pression, semble correspondre à l'apparition de l'ébullition nucléée et par la suite, l'ébullition en film donne un pic de pression correspondant à un taux de vide faible. Notons que ce phénomène pseudo-périodique n'apparaît sur notre enregistrement qu'au bout de 150 ms environ, car il n'a pas été possible expérimentalement, avant cet instant, de connaître l'évolution du taux de vide.

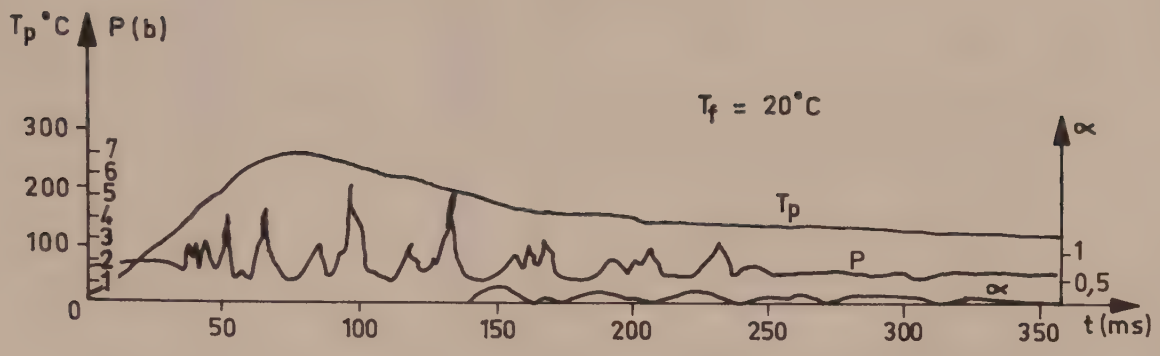

Figure 4

Des études plus fines, sur l'ébullition en transitoire ont été faites aux Laboratoires de Berkeley [7] et à l'Université de Manchester [8]. A l'aide d'une source électrique, un ruban de platine de petites dimensions était chauffé par un dégagement de puissance exponentiel en fonction du temps. Les températures d'eau, les températures de film, ainsi que les pressions étaient mesurées. Le but de ces études étaient de déterminer les lois de formation de bulles et l'évolution de ces bulles en film de vapeur. L'ensemble de ces phénomènes ont même été filmés à l'aide d'une caméra ultra-rapide à l'Université de Manchester [9]

4.2. - Principales conclusions

L'ébullition en régime transitoire apparaissant sur les plaques de réacteurs à eau, il est nécessaire pour prévoir le comportement de ceux-ci, de mieux connaître ce phénomène physique. A l'ébullition commençante (ébullition nucléée), des bulles apparaissent avec de nombreux germes sur des sites de nucléation. La température moyenne de l'eau étant relativement faible, ces bulles ont tendance à s'étaler le long de la paroi. En même temps que ces bulles s'étalent le long de la paroi, elles enferment sous elles, du fait de la viscosité de l'eau, une mince pellicule de liquide surchauffé. Ce phénomène a été observé par plusieurs expérimentateurs. Citons TORIKAI [10] qui a filmé l'apparition d'une bulle à travers une paroi semi-transparente, MORIN [11] qui a filmé aussi, l'ensemble des phénomènes d'ébullition sur différentes parois. L'étalement de ces bulles le long de la paroi chauffante crée un film de vapeur ayant emprisonné une mince pellicule d'eau le long de cette même paroi.

La figure 5 donne une représentation schématique de la formation de ce film de vapeur.

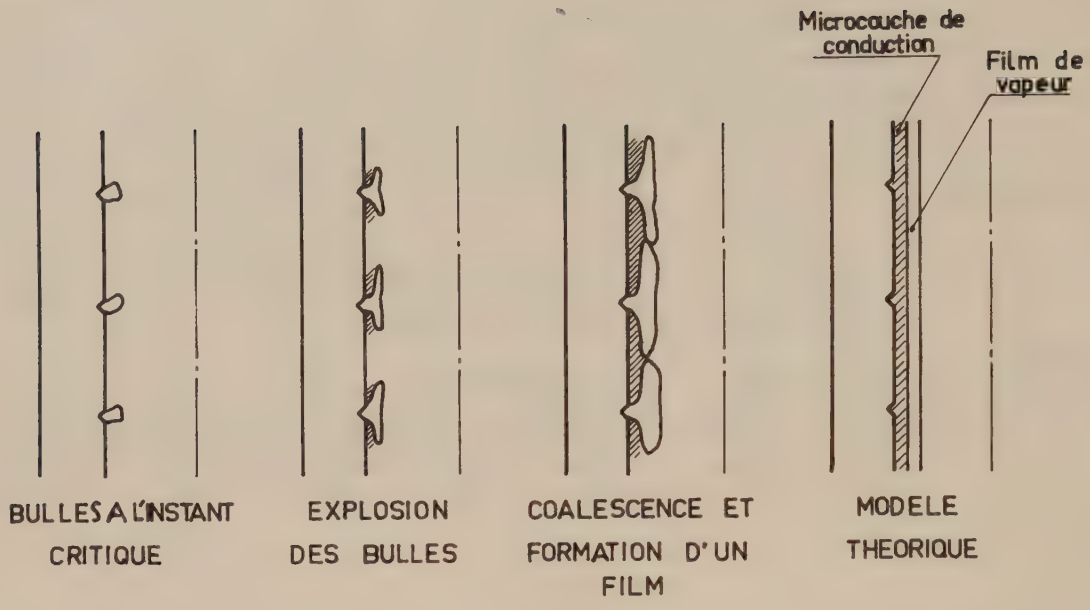

Figure 5

Un phénomène purement thermique s'établit. Cette mince pellicule d'eau est vaporisée, alimentant ainsi le film de vapeur qui lui, en contact avec de l'eau plus froide, commence à se condenser. Lorsque la pellicule d'eau est complètement vaporisée, il n'existe plus que le phénomène de condensation du film de vapeur. La vapeur se condense et l'eau froide revient au contact de la paroi. Les conditions d'ébullition peuvent alors se reproduire et l'ensemble des phénomènes se répètent. Il apparaît bien ainsi une pseudo-période dans l'ébullition en transitoire.

Notons que lorsque le film de vapeur disparaît, l'eau entre en contact de nouveau avec la paroi. Le choc induit par cette mise en contact peut être la cause de pics de pression importants. Il y a là, en plus de l'effet thermique, un effet purement mécanique.

A la suite des études expérimentales faites, brièvement décrites précédemment, et compte tenu du caractère probablement pseudo-périodique des transferts thermiques lors de l'ébullition transitoire, nous avons tenté de bâtir un modèle rendant compte des principaux phénomènes physiques.

La conduction de la chaleur, les principes de l'hydrodynamique et de la thermodynamique nous ont aidé à mettre au point un modèle théorique prenant en compte les transferts thermiques rapides.

CHAPITRE II

ETUDE THEORIQUE D'UN MODELE REPRESENTANT LA CONTRE-REACTION D'UN REACTEUR SOUMIS A UNE EXCURSION DE PUISSANCE

I. - INTRODUCTION

Le coeur du réacteur est constitué d'un ensemble de boîtiers enfermant plusieurs plaques de combustible, gainées d'aluminium. Ces boîtiers placés verticalement dans une grille sont immergés sous une certaine hauteur d'eau. Chaque plaque de combustible est ainsi séparée par un canal d'eau. L'association d'une demi-plaque de combustible et d'un demi-canal d'eau constitue une cellule élémentaire. Le coeur est considéré comme la réunion de cellules élémentaires ainsi définies.

L'analyse des différents phénomènes physiques est faite sur une cellule élémentaire. Elle permet de préciser la contre-réaction du réacteur et de construire un modèle d'évolution de la réactivité, au cours du temps. Cette expression de la réactivité est une fonction des températures de chaque milieu et du volume de vapeur formé. Les distributions de températures seront déterminées par les équations classiques de conduction et éventuellement de convection s'il y a mouvement d'eau dans le canal.

Le couplage des effets thermiques et mécaniques, par les phénomènes de transfert d'énergie, permettra de connaître l'évolution des épaisseurs de vapeur formées, tout au moins pour les quelques dizaines de millisecondes qui suivent l'ébullition commençante. Cet intervalle de temps est d'ailleurs suffisant pour mettre en évidence les causes qui ont provoqué l'accident explosif de SPERT 1.

Les températures et volumes de vapeur étant déterminés, nous pourrons définir une contre-réactivité, tenant compte des effets de dilatations de chaque milieu et de la vaporisation du modérateur. La réactivité, moyennée en x et z, devient alors une fonction du temps qui est introduite dans les équations de la cinétique des réacteurs et permet de connaître le comportement de la puissance moyenne du réacteur.

Nous exposerons d'abord de quelle façon nous avons utilisé les équations de la cinétique des réacteurs, puis donnerons la manière qui nous a permis de construire notre modèle de réactivité, en tenant compte successivement des phénomènes hydrodynamiques et thermodynamiques dans le canal, puis des phénomènes thermiques dans l'ensemble des trois milieux.

II. - CINETIQUE DES REACTEURS

2.1. - Généralités

Le taux de production de neutrons provoqué par les fissions dans le combustible étant légèrement supérieur à leur taux de disparition, le réacteur peut être maintenu à une puissance constante relativement faible (10 à 100 kW). La suppression brusque de matière absorbante dans le coeur provoque un rapide accroissement du taux de production des neutrons. Le réacteur est ainsi soumis à un échelon de réactivité qui provoque une excursion de puissance.

La puissance moyenne du réacteur évolue exponentiellement en fonction du temps, puis les phénomènes de contre-réaction interviennent heureusement pour s'opposer à ce comportement "asymptotique" de la puissance. C'est cette contre-réaction qu'il faut exprimer pour avoir une formulation correcte de la réactivité en fonction du temps. Il est cependant nécessaire de savoir avant, comment traduire analytiquement une excursion de puissance et par conséquent mettre en évidence les équations de la cinétique des réacteurs.

2.2. - Equations de la cinétique des réacteurs

Les équations de la cinétique des réacteurs se déduisent de l'équation de Boltzman à laquelle on adjoint une loi de production des neutrons retardés. L'intégration en espace, de ces deux relations, conduit à un modèle ponctuel des équations de la cinétique [20]. Cette hypothèse que nous avons adoptée est justifiée, en général, pour les réacteurs de petites dimensions. Les nombreuses études faites ont montré que ce modèle point est bien adapté tant qu'il ne s'agit pas de réacteurs de grande puissance.

Ces équations de la cinétique lient la puissance moyenne du réacteur à la réactivité et aux concentrations de neutrons retardés. Si le spectre des neutrons de fissions est bien connu, les spectres des neutrons retardés sont plus difficiles à bien déterminer. Il est raisonnable, dans la plupart des cas, de ne considérer que six groupes de neutrons retardés pour lesquels il est possible, en particulier, de bien connaître les constantes de décroissance radioactive. Nous conformant à cette restriction, les équations de la cinétique des réacteurs sont écrites avec six groupes de neutrons retardés. Cela conduit à un système de sept équations différentielles du premier ordre, la variable indépendante étant le temps :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{\tilde{\rho}(t) - 1}{\Lambda} \beta \mathcal{P}(t) + \sum_{j=1}^{6} \lambda_j C_j(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dC_j}{dt} = - \lambda_j C_j(t) + \beta_j \frac{\mathcal{P}(t)}{\Lambda} \qquad j=1, 2 \ldots 6 \qquad (2)$$

Dans ce système d'équations différentielles, la réactivité $\tilde{\rho}(t)$ est inconnue. Néanmoins, si à partir d'un régime permanent, le réacteur est soumis à un échelon de réactivité, c'est-à-dire si $\tilde{\rho}(t)$ est une fonction constante égale à $\tilde{\rho}_o$, l'évolution de la puissance est exponentielle au cours du temps.

Si nous cherchons, avec $\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}_o$, des solutions de la forme :

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}_o \, e^{\alpha t} \tag{3}$$

$$C_j(t) = C_{jo} \, e^{\alpha t} \tag{4}$$

nous trouvons pour $\tilde{\rho}_o$ l'expression suivante :

$$\tilde{\rho}_o = \frac{\Lambda \alpha}{\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{6} \frac{a_j}{\alpha + \lambda_j} \tag{5}$$

$$a_j = \frac{\beta_j}{\beta}$$

et pour C_{jo} :

$$C_{jo} = \frac{\beta_j}{\Lambda} \frac{\mathcal{P}_o}{\alpha + \lambda_j} \qquad j=1, 2 \ldots 6 \tag{6}$$

La relation (5) est la relation de Nordheim.

Dans le cas général, la résolution de (1) et (2) se fera avec les conditions initiales suivantes :

$$\mathcal{P}(o) = \mathcal{P}_o \qquad \text{constante donnée} \tag{7}$$

$$C_j(o) = \frac{\beta_j}{\Lambda} \frac{\mathcal{P}_o}{\alpha + \lambda_j} \qquad j=1, 2 \ldots 6 \tag{8}$$

Le comportement exponentiel de la puissance crée, au sein du coeur du réacteur, des élévations de températures brusques, qui provoquent des effets de dilatations importants qui peuvent aller jusqu'à la vaporisation du modérateur. C'est l'ensemble de ces phénomènes qui définissent l'antiréactivité permettant à la puissance, après une allure exponentielle, de passer par un maximum et de décroître au cours du temps. Pour définir la fonction $\tilde{\rho}(t)$, il est donc nécessaire d'examiner les conséquences des élévations brusques de températures dans la cellule élémentaire.

2.3. - Recherche d'un modèle de réactivité

Les trois milieux, combustible, gaine, modérateur, constituant la cellule élémentaire, ont des comportements différents qui dépendent de la distribution des températures. Le combustible et la gaine restant à l'état solide, ne peuvent subir que des phénomènes de dilatation. L'eau servant de modérateur peut rester à l'état liquide ou se vaporiser. La dilatation des solides fait intervenir leur coefficient de dilatation linéaire, tandis que l'échauffement de l'eau se traduit par une variation moyenne de la masse spécifique du liquide. S'il y a vaporisation, le volume de vapeur intervient directement en créant un vide dans le coeur du réacteur.

L'ensemble de ces changements de volume crée une antiréactivité proportionnelle au coefficient de vide moyen du coeur. Ce coefficient de vide moyen est une caractéristique du coeur (Annexe I). Il dépend essentiellement de la géométrie, et du nombre de plaques de combustible. La mesure expérimentale de ce coefficient est délicate, il est

préférable de l'évaluer par le calcul à l'aide de codes neutroniques (Annexe II). Il est considéré comme donné.

De plus, les élévations de température conduisent aussi à la déformation du spectre d'énergie des neutrons thermiques dans le modérateur. Ce phénomène, purement neutronique, crée une antiréactivité proportionnelle à la variation de température du modérateur et au coefficient moyen de température. Ce coefficient moyen de température est calculé (Annexe II) et considéré comme une caractéristique du coeur (Annexe I).

L'élaboration du modèle de réactivité s'est faite sur la cellule élémentaire : plaque, combustible et canal associé.

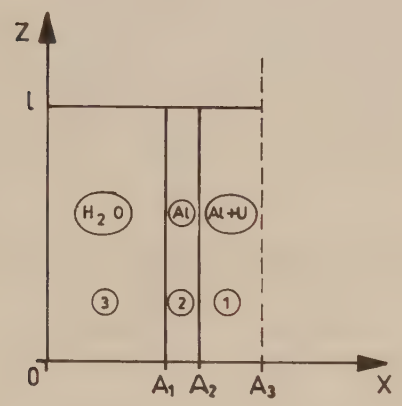

Figure 6

La répartition axiale du flux neutronique est en cosinus suivant l'axe des z :

$$\varphi(x,t) = A\ \varphi(t) \cos\left[\alpha\left(z - \frac{\ell}{2}\right)\right] \qquad (9)$$

avec $\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\delta + \frac{\ell}{2}}$

δ représente la distance d'extrapolation dans l'eau

$A = \frac{\alpha \ell}{2} \frac{1}{\sin \frac{\alpha \ell}{2}}$ est un coefficient de normalisation.

Cette loi de répartition du flux neutronique permet de définir un coefficient de vide a(z) et un coefficient de température $c_T(z)$ à partir du coefficient de vide moyen et du coefficient de température moyen — ces deux derniers coefficients étant bien sûr des constantes (indépendantes du temps).

Les températures dans le combustible, la gaine et l'eau sont désignées respectivement par $T_1(x,z,t)$, $T_2(x,z,t)$, $T_3(x,z,t)$. Elles n'interviennent que par leur moyenne en x dans l'expression de la réactivité.

La puissance de chauffage, dans la cellule élémentaire, dépend de la variable z par l'intermédiaire du flux neutronique; il est donc possible de définir une fonction de réactivité dépendant des variables z et t. Cette expression doit tenir compte des phénomènes physiques décrits précédemment : dilatation des différents matériaux constituant une plaque combustible, variation de la masse spécifique du modérateur, apparition de vapeur et déformation du spectre de neutrons thermiques.

Le modèle adopté pour la réactivité est alors le suivant :

$$\tilde{\rho}(z,t) = \tilde{\rho}_o - a(z)\left[b_1\left(\overline{T_1}^x(z,t) - T_i\right) + b_2\left(\overline{T_2}^x(x,t) - T_i\right) + b_3\left(\overline{T_3}^x(z,t) - T_i\right)\right]$$
$$- c_T(z)\left[\overline{T_3}^x(z,t) - T_i\right] - 2\,N_p * A\ a(z)\ \gamma\ y(z,t) \qquad (10)$$

b_1 et b_2 sont les coefficients globaux de dilatation (Annexe III);

b_3 traduit la variation de masse spécifique du modérateur (Annexe II);

$y(z,t)$ est l'épaisseur de vapeur à une cote donnée;

γ est un coefficient de pondération qui moyenne l'évaporation dans le coeur.

La moyenne en z de l'expression de la réactivité $\overline{\rho}(z,t)$ est introduite dans les équations de la cinétique et permet de déterminer l'évolution de la puissance moyenne du réacteur au cours du temps.

Cependant la détermination de la réactivité nécessite le calcul des distributions de température dans chaque milieu, ainsi que l'évaluation du volume de vapeur susceptible d'apparaître au cours de l'excursion de puissance. C'est à la résolution de ces problèmes qu'il faut maintenant s'attacher.

III. - PHENOMENES HYDRODYNAMIQUES ET THERMODYNAMIQUES DANS LE CANAL

3.1. - Introduction

Les excursions de puissance sont susceptibles d'être faites en convection naturelle ou en convection forcée. Nous limiterons l'étude de notre modèle à la convection naturelle. Dans ce cas, à l'instant initial, le système de refroidissement du réacteur est à l'arrêt. Il faut alors attendre une évolution suffisante des températures — évolution qui dépend d'ailleurs de la période ($\tau = \frac{1}{\alpha}$) initiale du réacteur — pour arriver à la vaporisation du modérateur.

Ces phénomènes d'ébullition créent dans le canal une perturbation qui provoque la naissance d'un champ de vitesses. Il s'agit dans ce paragraphe de préciser cette perturbation.

3.2. - Equations de l'Hydrodynamique

Dès que l'ébullition a fait son apparition, il existe en général dans le canal pour chaque particule d'eau deux composantes de vitesses u et w qui obéissent aux équations de l'hydrodynamique. Ces équations peuvent être écrites en tenant compte de la compressibilité du fluide envisagé, de sa viscosité et de son équation d'état [15]. Nous faisons cependant les hypothèses simplificatrices suivantes : le modérateur est un fluide incompressible, de masse spécifique constante. Dans ces conditions, si le vecteur $\vec{V} = \{u,w\}$ désigne la vitesse d'une particule dans le canal, l'équation de continuité s'écrit de la façon suivante :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (11)$$

Les équations de l'hydrodynamique s'écrivent :

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_3}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (12)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_3}\frac{\partial P}{\partial z} - g \qquad (13)$$

avec $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}$

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que le mouvement de l'eau, lorsqu'il y a perturbation, est un mouvement irrotationnel.

Cette hypothèse est plausible car nous ne nous intéressons au mouvement de l'eau du canal que pendant quelques dizaines de millisecondes après le début de l'ébullition commençante. Durant ce laps de temps, un régime turbulent n'a pas le temps de s'établir, d'autant plus qu'avant l'ébullition, l'eau du canal est supposée au repos.

Le fait que le mouvement soit irrotationnel, se traduit par la relation suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (14)$$

Le champ de vitesse dérive donc d'un potentiel. Il existe alors une fonction Φ telle que:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad (15)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad (16)$$

La fonction Φ est harmonique :

$$\Delta \Phi = 0 \qquad (17)$$

La résolution de ce Laplacien, compte tenu de conditions limites bien déterminées permet de connaître les vitesses. Une première condition est u=0 sur l'axe de symétrie du canal (x=0). Pour pouvoir fixer d'autres conditions aux limites, il nous faut maintenant préciser le domaine dans lequel l'équation (17) doit être résolue et donc définir la perturbation apportée par l'ébullition.

3.3. - Ebullition

La croissance d'une bulle de vapeur sur une paroi se fait à partir d'un site de nucléation, dans des conditions bien déterminées.

L'interface, supposée de forme sphérique, qui sépare la vapeur et le liquide obéit aux lois de Laplace et est en équilibre thermodynamique sous l'effet des forces de tension. L'échauffement de la paroi fait croître la bulle de vapeur jusqu'à ce qu'elle atteigne un équilibre instable, qui est la limite de validité des lois de Laplace. A cet instant la bulle de vapeur possède son rayon critique R*. Cette description microscopique de l'ébullition conduit à définir un critère d'ébullition pour chaque cote z dans le canal (Annexe IV). Ce critère d'ébullition, valable pour $T_p > T_s$, traduit localement, l'équilibre thermodynamique, à l'interface sphérique liquide et bulle de vapeur lorsque celle-ci atteint son rayon critique.

Plus précisément, à l'instant $t_e(z)$ de l'ébullition commençante, les lois de Laplace se traduisent par les relations écrites à l'interface eau-vapeur :

$$T_v = T_\ell$$

$$P_v = P_\ell + \frac{2\sigma}{R^*}$$

T_v, P_v désignent la température et la pression dans la bulle de vapeur (on suppose d'ailleurs que la vapeur est saturante).

T_ℓ, P_ℓ désignent la température et la pression du liquide.

En particulier ces relations écrites au point A donnent l'équation :

$$T_\ell = T_{sat}\ (P_\ell + \frac{2\sigma}{R^*})$$

qui détermine l'instant d'apparition de l'ébullition.

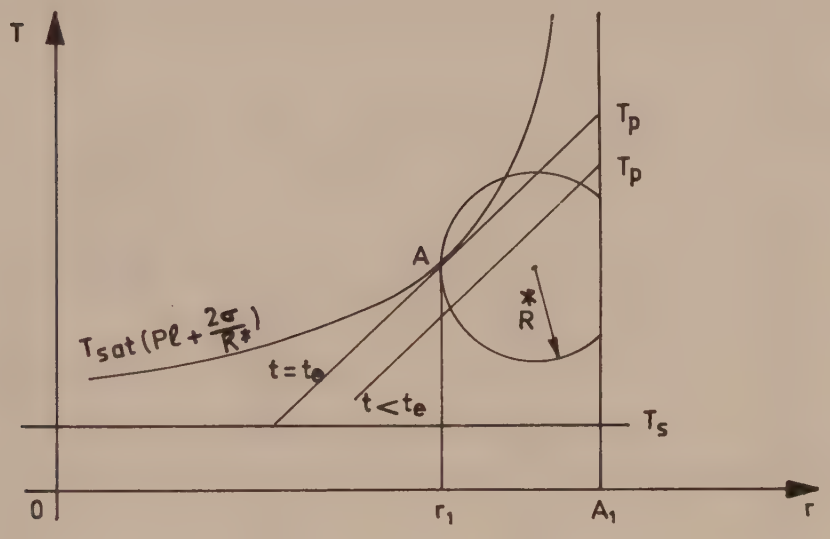

Figure 7

Ceci revient à chercher, l'instant t où un profil de température dans l'eau, supposé linéaire au voisinage de la plaque (quelques dizaines de microns), rencontre en A la courbe $T_{sat}\ (P_\ell + \frac{2\sigma}{R^*})$ qui est d'allure hyperbolique. La bulle de vapeur a atteint un équilibre instable.

En écrivant que le profil de température dans l'eau est tangent en A à la courbe $T_{sat}\ (P_\ell + \frac{2\sigma}{R^*})$, le critère d'ébullition se traduit par la relation :

$$T_p + R_1 \frac{\partial T_p}{\partial x} - \frac{a\ T_s}{a - T_s \left[1 - \frac{2\sigma\ (1 + \cos\theta)}{P_\ell\ R_1}\right]} = 0 \qquad (18)$$

Dans cette relation: T_s, $\frac{\partial T_p}{\partial x}$, P_ℓ et T_p dépendent de z et de t

: $R_1 = r_1 - A_1$

$$R_1 = \frac{\sigma (1 + \cos \theta) \frac{\partial T_p}{\partial x} (2 T_p + a) - \sqrt{\Delta'}}{\frac{\partial T_p}{\partial x} \left[a P_\ell - 2\sigma (1 + \cos \theta) \frac{\partial T_p}{\partial x} \right]}$$

avec $\Delta' = \sigma (1 + \cos \theta) a \frac{\partial T_p}{\partial x} \left[\sigma (1 + \cos \theta) \frac{\partial T_p}{\partial x} (a + 4 T_p) + 2 P_\ell T_p^2 \right]$

Ces calculs sont détaillés en Annexe IV.

Lorsque la relation (18) est vérifiée, on dit que l'on a détecté à la cote z, et à l'instant t l'ébullition. On définit ainsi l'instant d'apparition de l'ébullition à la cote z : $t_e(z)$.

A partir de cet instant, au voisinage de la cote z, le flux thermique étant élevé, le nombre de germes actifs par unité de surface est important. Chaque bulle de vapeur explose sur la paroi, puisque chacune d'elle a atteint son rayon critique. En explosant chaque bulle enferme sous elle, du fait de la viscosité de l'eau, une mince pellicule d'eau surchauffée. La coalescence des bulles amène localement la formation d'un film infiniment mince de vapeur.

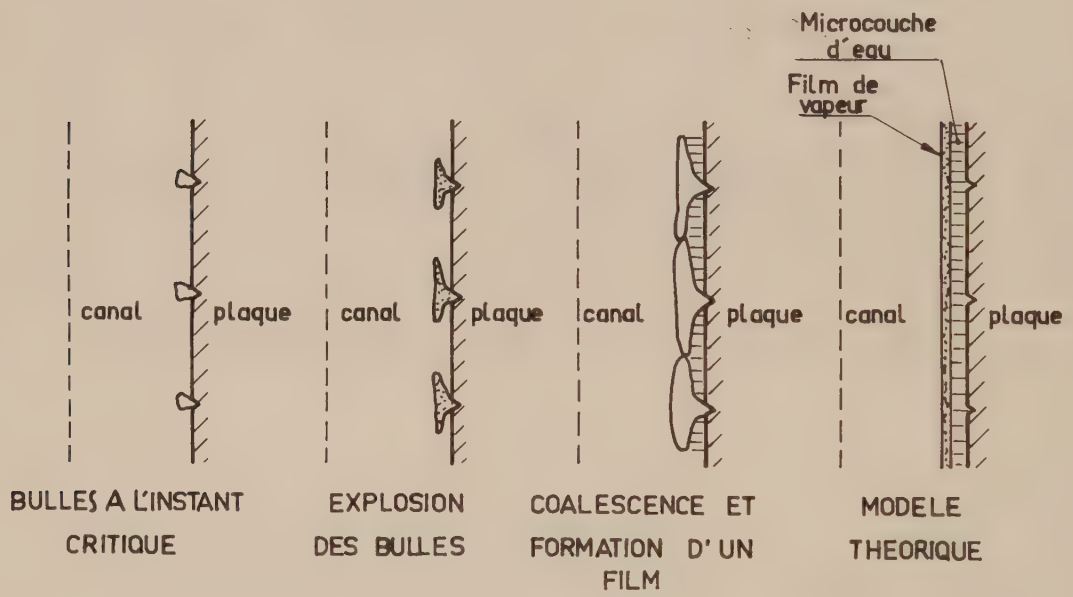

Figure 8

Nous admettons, qu'à l'instant $t_e(z)$, l'ensemble de ces phénomènes se produisent instantanément. Si bien qu'à cet instant, caractérisant le début de l'ébullition au voisinage de la cote z, nous nous trouvons en présence, de gauche à droite, de l'eau du canal, d'un film de vapeur infiniment mince, et d'une microcouche d'eau en contact avec la paroi chauffante. La microcouche d'eau favorisera, par conduction, le développement du film de vapeur, tandis qu'elle-même disparaîtra. Ce modèle, déjà cité dans notre étude bibliographique, a été observé en particulier par MORIN [11].

Pour suivre au cours du temps l'évolution de la microcouche d'eau et du film de

vapeur formé, nous calculerons les quantités suivantes : e(z,t) et y(z,t).

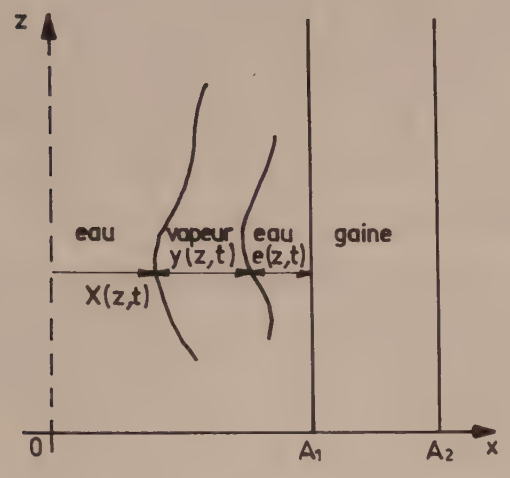

Figure 9

$$y(z,t) = A_1 - X(z,t) - e(z,t) \qquad (19)$$

e(z,t) représente l'épaisseur de la microcouche d'eau;

y(z,t) représente le film de vapeur.

Les équations différentielles qui régissent ces deux grandeurs sont les suivantes:

$$\mathcal{L}\rho_3 \frac{\partial e}{\partial t} = - \lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial x}\right)_{(A_1-e)} \qquad (20)$$

$$\rho_3 \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_v\, y) + \rho_3 \left(- u + w \frac{\partial X}{\partial z}\right)_{x=X} \qquad (21)$$

La première équation (20) exprime seulement que l'apport d'énergie $\lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial x}\right)_{(A_1-e)}$ provenant de la gaine sert à vaporiser une partie de la microcouche. L'échauffement de la microcouche est négligeable.

La seconde équation (21) exprime la conservation de la masse dans le demi-canal dans l'épaisseur du film de vapeur et l'épaisseur de la microcouche d'eau, en tenant compte de $\Delta\Phi=0$ (cf. Annexe IV). Les valeurs initiales de e sont données par :

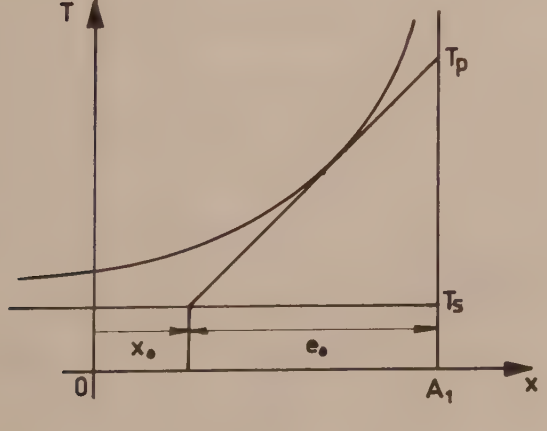

Figure 10

$$e_o(z,t_e) = \frac{T_p - T_s}{\left(\frac{\partial T_3}{\partial x}\right)_{A_1}} \qquad (22)$$

car la distribution de température dans la microcouche d'eau est supposée linéaire.

Les valeurs initiales de y sont alors :

$$y_o(z,t_e) = 0 \qquad (23)$$

car $X_o = A_1 - e_o$

L'évolution au cours du temps de y(z,t) et e(z,t) définit l'évolution de X(z,t). Il faut noter que e(z,t) reste faible, de l'ordre de quelques dizaines de microns. X(z,t) définit, dès qu'il y a ébullition, une paroi mobile le long de la plaque. C'est l'évolution de cette paroi mobile qui perturbe le champ des vitesses dans le modérateur et crée en particulier pour chaque particule d'eau une composante horizontale de vitesse et une composante verticale de vitesse.

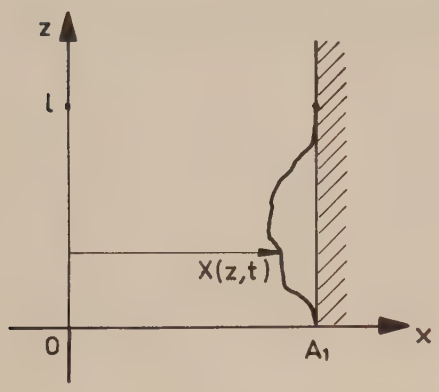

Figure 11

La partie chauffante de l'élément combustible étant limité entre z=0 et z=ℓ nous avons fait l'hypothèse qu'en ces deux extrémités, il n'y avait pas ébullition.

$$X(o,t) = 0 \qquad (23)$$

$$X(\ell,t) = 0 \qquad (24)$$

Les phénomènes d'ébullition, essentiellement thermodynamiques, provoquent une perturbation sur les phénomènes hydrodynamiques — en créant le long de la plaque cette paroi mobile. C'est en tenant compte de l'existence de cette paroi mobile qu'il faut maintenant étudier le champ des vitesses dans le canal.

3.4. - Détermination du potentiel de vitesses et conditions de pression

Nous devons résoudre $\Delta\Phi = 0$ dans le demi-canal, limité par la frontière eau-vapeur. Cette résolution ne peut se faire que si les conditions sur les bords du domaine sont fixées.

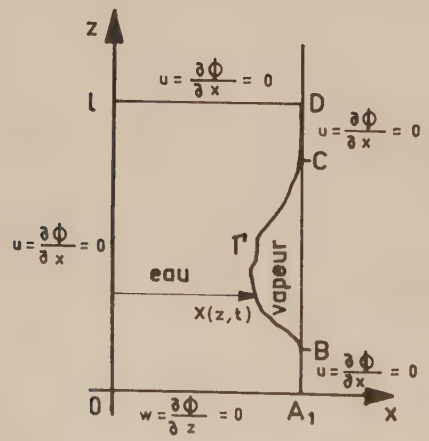

Figure 12

x=0 étant l'axe de symétrie du canal nous prenons, nous l'avons déjà dit,

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x=0 \qquad (25)$$

Nous avons supposé, de plus, que le canal était fermé à sa partie inférieure (z=0) ce qui s'exprime par la condition:

$$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \qquad (26)$$

Les autres conditions adoptées sont les suivantes :

En haut du canal : $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ pour $z = \ell$ (27)

Le long de A_1B : $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ pour $x = A_1$ (28)

Le long de CD : $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ pour $x = A_1$ (29)

Ces conditions sont des conditions de Neumann.

Il reste à exprimer une condition sur la frontière eau-vapeur.

Nous prendrons une condition de Dirichlet, c'est-à-dire que Φ sera donné sur Γ

$$\Phi = \Phi_\Gamma \tag{30}$$

Le problème de la résolution du Laplacien est ainsi bien déterminé. Nous allons cependant transformer la condition $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ pour $z = \ell$ en une condition équivalente en tenant compte des conditions de pression.

Revenons aux équations de l'hydrodynamique.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{31}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{32}$$

Puisque $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, nous les écrivons sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = - \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{34}$$

Intégrons l'équation (33) par rapport à x, en remarquant que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

$$- \frac{1}{\rho_3} P = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + f(z,t)$$

En tenant compte de (34) et en dérivant cette relation par rapport à z, nous obtenons :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) = g$$

$$f(z,t) = gz + h(t)$$

L'équation donnant la pression est alors :

$$P(x,z,t) = - \rho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho_3}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \rho_3 gz + \varphi(t) \tag{35}$$

en posant $\varphi(t) = - \rho_3 h(t)$

La condition $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ pour $z = \ell$ exprime que Φ est indépendante de x et ne dépend que du temps. Nous choisissons alors $\Phi = 0$:

$$P(x,\ell,t) = -\frac{\rho_3}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2_{(x,\ell,t)} - \rho_3 g \ell + \varphi(t) \tag{36}$$

La pression moyenne en haut du canal est donnée

$$\overline{P}^{x} = P_o - \rho_3 g \ell \tag{37}$$

P_o désigne la pression statique en bas du canal.

En tenant compte de la relation (37) et de l'équation (36), $\varphi(t)$ est donnée par

$$\varphi(t) = P_o + \frac{\rho_3}{2A_1}\int_o^{A_1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2_{(x,\ell,t)} dx \tag{38}$$

Les conditions sur la frontière du domaine, permettant de résoudre $\Delta\Phi=0$, sont donc finalement les suivantes :

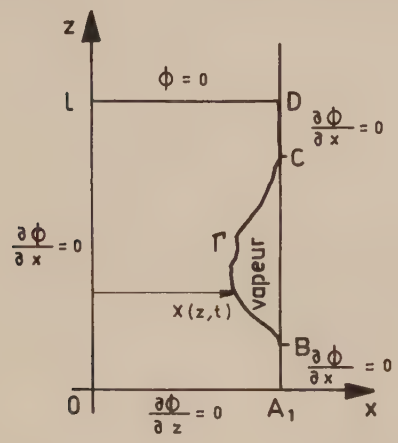

Figure 13

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \qquad x=0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \qquad x=A_1 \text{ le long de CD} \tag{40}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \qquad x=A_1 \text{ le long de } A_1B \tag{41}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad x=0 \tag{42}$$

$$\Phi = \Phi_\Gamma \quad \text{pour les points où il y a effectivement ébullition} \tag{43}$$

$$\text{et } \Phi = 0 \quad \text{pour } z=\ell \tag{44}$$

Notons, tout de suite, que la condition $\Phi = \Phi_\Gamma$ pour les points où il y a ébullition sera déterminée par l'intégration de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho_3} - \frac{1}{2}\left[u^2 + w^2\right] - gz + \frac{\varphi(t)}{\rho_3} \tag{45}$$

où P est la pression dans la vapeur, qui sera déterminée par la température de saturation dans la vapeur $P = f(T_S)$.

$\varphi(t)$ est connue, les vitesses u et w sont supposées calculées. Ainsi Φ est bien déterminé ainsi que les vitesses puisque $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

De plus, la relation (35) donne les pressions où il n'y a pas ébullition

$$P(x,z,t) = -\rho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho_3}{2}(u^2 + w^2) - \rho_3 gz + \varphi(t) \tag{46}$$

IV. - PHENOMENES THERMIQUES DANS UNE CELLULE ELEMENTAIRE

4.1. - Introduction

La cellule élémentaire comporte trois milieux, le combustible, la gaine et le modérateur. Dans les milieux solides, les phénomènes thermiques sont des phénomènes de conduction, qu'il y ait ou non ébullition pour le modérateur.

Les phénomènes thermiques dans le modérateur sont plus complexes. S'il n'y a pas ébullition nous n'avons affaire qu'à des phénomènes de conduction, puiqu'il n' y a aucune vitesse dans le modérateur. S'il y a ébullition, la perturbation créée par cette ébullition confère à chaque particule d'eau deux composantes de vitesse. Nous devons tenir compte à la fois des phénomènes de conduction et de convection.

Nous distinguerons, pour déterminer les distributions de températures dans chaque milieu, les deux cas : pas de perturbation, donc pas d'ébullition, et perturbation créée par l'apparition de l'ébullition.

4.2. - Distribution des températures sans perturbation

La théorie de la diffusion de la chaleur, établie par Fourier, conduit à écrire pour chaque milieu, des équations de conduction qui régissent les températures sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + S(z,t) \qquad \text{pour le combustible} \qquad (47)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \qquad \text{pour la gaine} \qquad (48)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = a_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \qquad \text{pour l'eau} \qquad (49)$$

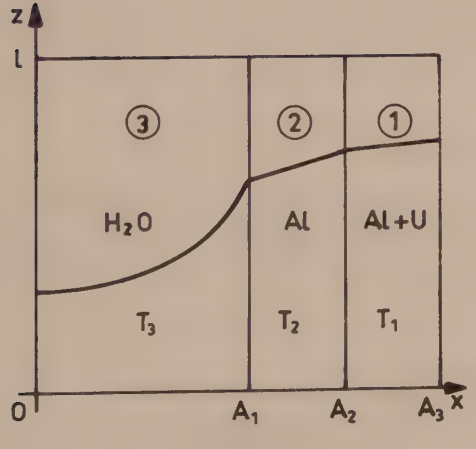

Figure 14

Les indices 1, 2, 3 se rapportent respectivement au combustible, à la gaine, et à l'eau du canal.

Dans ces équations la conduction en z ne figure pas car des calculs préliminaires ont montré que la variation du flux en z était négligeable. La source S(z,t) est proportionnelle à la puissance moyenne du réacteur et répartie suivant l'axe des z, par la formule suivante :

$$S(z,t) = A \cdot P^* \left\{ \left(\mathcal{P}(t) - \mathcal{P}_o \right) \cos \left[\alpha \left(z - \frac{\ell}{2} \right) \right] \right\}$$

A est un coefficient de normalisation.

P* est un facteur de conversion d'unités servant à transformer les MW en o/s.

Cette loi de répartition en z a déjà été rencontrée au paragraphe 2.3.

Nous supposons au départ de l'excursion de puissance, une répartition uniforme de température dans les trois milieux. Les conditions initiales à adjoindre au système (47), (48), (49) sont donc les suivantes :

$$t = 0 \qquad T_1 = T_2 = T_3 = T_i \tag{50}$$

T_i est la température initiale qui est donnée.

Les conditions aux limites utilisées sont classiques.

En A_3, où se situe l'axe de symétrie du canal, la température admet une tangente horizontale.

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}(A_3) = 0 \tag{51}$$

En A_2, où deux milieux différents sont en contact, il faut exprimer l'égalité des températures et l'égalité des flux calorifiques, c'est à dire :

$$T_1(A_2) = T_2(A_2) \tag{52}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(A_2) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_2) \tag{53}$$

De la même façon en A_1, il y a égalité des températures et des flux calorifiques :

$$T_2(A_1) = T_3(A_1) \tag{54}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(A_1) \tag{55}$$

Enfin, en A_3 se situe l'axe de symétrie du canal (x=0). La température T_3 admet une tangente horizontale.

$$\frac{\partial T_3}{\partial x}(0) = 0 \tag{56}$$

L'ensemble des conditions initiales et des conditions aux limites définissent complètement les solutions du système (47), (48), (49); c'est-à-dire que les distributions de températures dans chaque milieu sont bien déterminées. Il est donc facile à partir de ces distributions de températures de définir une fonction de réactivité $\tilde{\rho}(z,t)$.

4.3. - Distribution des températures avec perturbation

A partir de l'instant où le test ébullition a été vérifié pour au moins une cote z dans le canal, la détermination des températures se fait avec perturbation. Il faut alors tenir compte de l'existence de deux composantes de vitesses u et w pour chaque particule d'eau.

Les équations qui définissent les températures sont les suivantes :

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + S(z,t) \qquad \text{pour le combustible} \tag{57}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \qquad \text{pour la gaine} \tag{58}$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} + u \frac{\partial T_3}{\partial x} + w \frac{\partial T_3}{\partial z} = a_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \qquad \text{pour le modérateur} \qquad (59)$$

Comme dans le cas sans perturbation, la conduction en z a été négligée.

Il nous faut dans ce cas une condition limite en z pour T_3.

Celle que nous avons adoptée est la suivante :

$$T_3(x,z,t) = T_i \qquad \text{pour } z > \ell \text{ (inégalité stricte) } \forall x,t \qquad (60)$$

La distribution de température dans le modérateur pour z=0, est celle qui existait au moment de l'apparition de l'ébullition.

Les conditions limites en x, en 0, A_2 et A_3 sont les mêmes que sans perturbation.

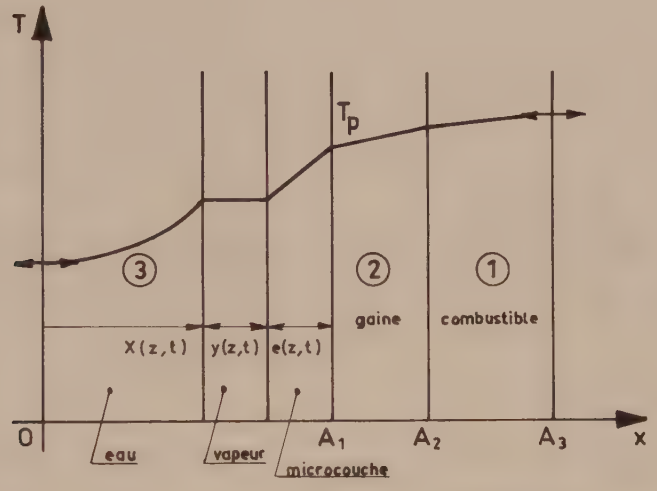

Figure 15

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}(A_3) = 0 \qquad (61)$$

$$T_1(A_2) = T_2(A_2) \qquad (62)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(A_2) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_2) \qquad (63)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x}(0) = 0 \qquad (64)$$

En A_1, les conditions limites sont différentes suivant qu'à la cote z considérée il y a ou non ébullition et suivant que l'on se trouve en présence ou non d'une micro-couche d'eau, lorsqu'il y a ébullition.

a) Cote où il n'y a pas ébullition

C'est le cas le plus simple, les conditions sont les mêmes que sans perturbation :

$$T_2\ (A_1) = T_3\ (A_1) \tag{65}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\ (A_1) = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}\ (A_1) \tag{66}$$

relations qui expriment l'égalité des températures, et l'égalité des flux calorifiques en A_1.

b) Cote où il y a ébullition

Il faut distinguer lorsqu'il y a ébullition, le cas où il y a microcouche d'eau ou non.

α) Il existe une microcouche d'eau ($e \neq 0$)

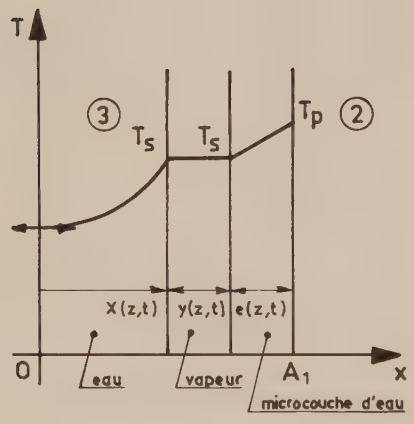

Figure 16

Nous faisons l'hypothèse que la température dans la microcouche est linéaire — ce qui est justifié par le peu d'épaisseur de cette microcouche (quelques dizaines de microns).

L'égalité des flux calorifiques se traduit donc par la relation :

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\ (A_1) = \lambda_3 \frac{T_p - T_s}{e} \tag{67}$$

La seconde relation est obtenue en admettant une température constante dans la vapeur et égale à la température de saturation T_s, et en exprimant la conservation de l'énergie dans le système formé par la vapeur et la microcouche d'eau.

Cette équation de conservation d'énergie s'écrit (cf. Annexe VII)

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\ (A_1) - \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}\ (X,z) = C_p\ \rho_v y \frac{\partial T_s}{\partial t} + \left(\mathcal{L} - \frac{kp}{\rho_v}\right) \frac{\partial}{\partial t}\ (\rho_v y) + kp \frac{\partial y}{\partial t} \tag{68}$$

avec $\rho_v = \frac{M}{R} \frac{P}{T_S}$ qui est la loi des gaz parfaits appliquée à la vapeur.

β) Il n'existe pas de microcouche d'eau ($e=0$)

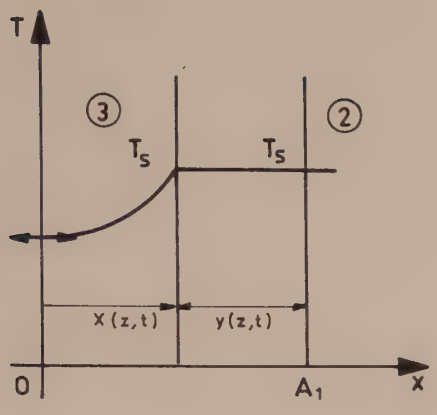

Figure 17

La vapeur est directement en contact avec la gaine. Nous exprimons que la vapeur est isolante en écrivant qu'il n'y a pas de transfert de chaleur entre la gaine et la vapeur

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) = 0 \qquad (69)$$

La seconde relation est la même que précédemment :

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) - \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(X,z) = C_p \rho_v y \frac{\partial T_s}{\partial t} + (\mathcal{L} - \frac{kp}{\rho_v}) \frac{\partial}{\partial t}(\rho_v y) + kp \frac{\partial y}{\partial t} \qquad (70)$$

avec $\rho_v = \frac{M}{R} \frac{P}{T_s}$ (71)

Ces conditions aux limites permettent de déterminer les distributions de températures dans chacun des trois milieux suivant qu'à une cote donnée il y a ébullition ou non.

CHAPITRE III

METHODES NUMERIQUES

I. - INTRODUCTION

L'exposé général théorique étant fait, il est nécessaire maintenant de voir de quelles façons les différents problèmes ont été résolus. L'accessibilité par un ordinateur, de chaque problème, demande que celui-ci soit soumis à une analyse numérique. Nous donnons dans ce chapitre les différentes méthodes numériques utilisées. En particulier seront précisées les approximations faites ainsi que les procédés de discrétisation approchant chaque équation théorique.

Nous devons noter déjà que la phase sans ébullition n'offre pas de difficultés essentielles et qu'elle s'accommode fort bien de méthodes numériques classiques. La phase avec ébullition est un peu plus délicate à aborder du fait de l'existence d'un mouvement du modérateur. La résolution d'un Laplacien dans un domaine dont une paroi est mobile sera faite d'une façon particulière, propre à la géométrie du canal. De même la méthode de discrétisation de la température dans l'eau sera liée directement au problème physique posé, c'est-à-dire au mouvement du modérateur.

Après avoir traité la résolution des équations de la cinétique, nous donnerons la détermination des températures sans perturbation, c'est-à-dire sans ébullition. Nous aborderons,par la suite, la résolution du Laplacien qui détermine les vitesses et les pressions, puis la détermination des températures avec perturbation, perturbation créée par l'ébullition.

Un organigramme général donnera la logique du programme et rendra compte des différentes phases de calcul.

II. - RESOLUTION DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

L'ensemble des équations de la cinétique forme un système d'équations différentielles classiques où la variable indépendante est le temps. Rappelons ce système d'équations :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{\tilde{\rho}(t) - 1}{\Lambda}\,\beta\,\mathcal{P}(t) + \sum_{j=1}^{6} \lambda_j\, C_j(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dC_j}{dt} = -\lambda_j\, C_j(t) + \frac{\beta_j}{\Lambda}\,\mathcal{P}(t) \qquad j=1, \ldots 6 \qquad (2)$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_o \tag{3}$$

$$C_j(0) = \frac{\beta_j}{\Lambda} \frac{\mathcal{P}_o}{\alpha + \lambda_j} \qquad j=1,\ 2,\ \ldots\ 6 \tag{4}$$

Pour résoudre un tel système, il existe des méthodes classiques en particulier la méthode de Runge-Kutta. Cette méthode fait d'ailleurs l'objet d'un sous-programme bibliothèque dans lequel la troncature est du 5^e ordre. Cependant, nous avons préféré, afin d'économiser du temps machine, utiliser une méthode Runge-Kutta moins élaborée mais satisfaisante : une méthode de prédicteur-correcteur dans laquelle la troncature est du 3^e ordre. Rappelons cette méthode en envisageant une seule équation différentielle :

$$\frac{d\Psi}{dt} = f(t,\ \Psi(t)\ )$$

Supposons toutes les quantités connues à l'instant t. Nous allons déterminer ces mêmes quantités à l'instant t+δt de la façon suivante :

Le prédicteur est donné par un développement de Taylor du premier ordre :

$$\Psi^* = \Psi(t) + \delta t \frac{d\Psi}{dt}(t)$$

soit : $\Psi^* = \Psi(t) + \delta t\ f(t,\Psi(t)\ )$

Le correcteur est alors donné par la relation :

$$\Psi(t + \delta t) = \Psi(t) + \frac{\delta t}{2}\left[f(t,\Psi) + f(t,\Psi^*)\right]$$

L'application de cette méthode prédicteur-correcteur à la résolution des équations de la cinétique permet d'écrire les égalités suivantes :

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}(t) + \delta t\left\{\frac{\tilde{\rho}(t)-1}{\Lambda}\ \beta\mathcal{P}(t) + \sum_{j=1}^{6}\ \lambda_j\ C_j(t)\right\} \tag{5}$$

$$C_j^* = C_j(t) + \delta t\left\{-\ \lambda_j\ C_j(t) + \frac{\beta_j}{\Lambda}\mathcal{P}(t)\right\} \qquad j=1,2\ldots6 \tag{6}$$

Ces égalités définissent les prédicteurs.

Les équations qui donnent les correcteurs sont :

$$\mathcal{P}(t+\delta t) = \mathcal{P}(t) + \frac{\delta t}{2}\left\{\frac{\tilde{\rho}(t)\ -\ 1}{\Lambda}\ \beta\mathcal{P}(t) + \sum_{j=1}^{6}\lambda_j\ C_j(t) + \frac{\tilde{\rho}^*-1}{\Lambda}\ \beta\mathcal{P}^* + \sum_{j=1}^{6}\lambda_j\ C_j^*\right\} \tag{7}$$

$$C_j(t+\delta t) = C_j(t) + \frac{\delta t}{2}\left\{-\ \lambda_j\ C_j(t) + \beta_j\mathcal{P}(t) - \lambda_j\ C_j^* + \beta_j\mathcal{P}^*\right\} \tag{8}$$

Dans la relation (5), $\tilde{\rho}(t)$ est définie par :

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}_o - \frac{1}{\ell}\int_o^\ell a(z)\left[b_1\left(\overline{T_1}^x(z,t) - T_i\right) + b_2\left(\overline{T_2}^x(z,t) - T_i\right) + b_3\left(\overline{T_3}^x(z,t) - T_i\right)\right]dz$$

$$- \frac{1}{\ell}\int_o^\ell c(z)\left[\overline{T_3}^x(z,t) - T_i\right]dz - 2\ N_p\Delta\frac{\gamma}{\ell}\int_o^\ell a(z)\ y(z,t)\ dz$$

La fonction ρ^* qui apparaît dans la relation (7) est la relation précédente où simplement $y(z,t)$ a été remplacé par son prédicteur y^*.

Le pas en temps choisi dépend de la période de l'excursion de puissance et diminue lorsque la période diminue. Différents essais ont permis de déterminer ce pas en temps : $\delta t = \frac{\tau}{10}$, τ étant la période de l'excursion de puissance. Ceci n'est qu'un ordre de grandeur car dès qu'apparaît les phénomènes d'ébullition ce pas est en général réduit et est à la disposition de l'utilisateur qui examine le développement de la vapeur sur un écran de visualisation. Ceci permet de mieux décrire les phénomènes de transferts thermiques rapides.

III. - DETERMINATION DES TEMPERATURES SANS PERTURBATION

3.1. - Introduction

Lorsqu'il n'y a pas perturbation, le modérateur est immobile. Les équations qui régissent les distributions de températures dans les trois milieux combustible, gaine et eau sont des équations de conduction dans lesquelles la conduction en z est négligée.

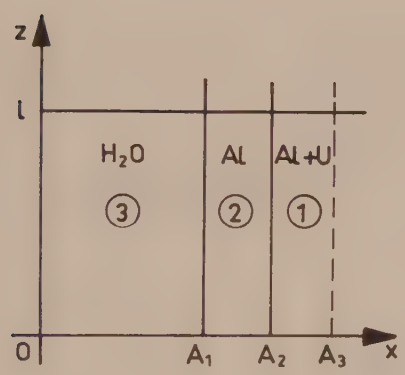

Figure 18

L'indice 1 se rapporte au milieu combustible.

L'indice 2 se rapporte au milieu aluminium.

L'indice 3 se rapporte à l'eau du demi-canal.

Les équations à discrétiser sont les suivantes :

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + S(z,t) \qquad (9)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \qquad (10)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = a_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \qquad (11)$$

Un maillage en x étant défini dans chacun des milieux, nous donnerons en premier lieu la méthode aux différences finies utilisées dans le cas général. Puis nous exprimerons les différentes conditions aux limites, à chaque interface. Cette discrétisation de l'ensemble des équations (9), (10) et (11) conduira à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est tridiagonale.

3.2. - Méthode de discrétisation

La méthode utilisée est une méthode de Crank-Nicholson [16]. Nous l'exposons pour le milieu combustible et donnerons les résultats pour les milieux gaine et eau, où les

sources sont nulles.

L'indice i caractérisera la cote x, l'indice j la cote z et l'indice n le temps.

Le maillage dans le combustible est défini ainsi : nous supposons n_1 points en x et n_k points en z. Les pas respectifs en x et z sont donnés par :

$$h_1 = \frac{A_3 - A_2}{n_1 - 1}$$

$$h = \frac{\ell}{n_k - 1}$$

Nous noterons en général $T_{1,i,j}$ l'approximation de T_1 au point $\{(i-1)h_1, (j-1)k\}$ et au temps n x δt. L'indice j sera omis lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté.

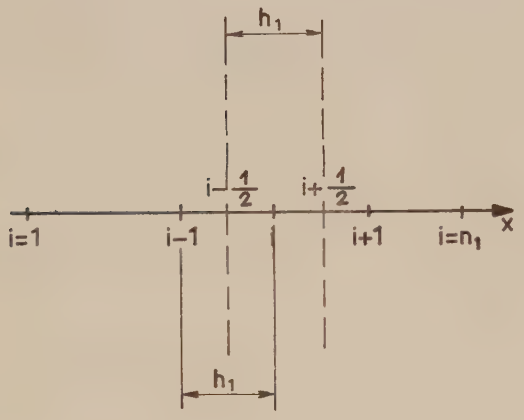

Figure 19

L'équation (9) est intégrée entre $i - \frac{1}{2}$ et $i + \frac{1}{2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} T_1 \, dx = a_1 \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \, dx + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} S(z,t) \, dx \qquad (12)$$

En prenant pour T_1 la valeur au milieu de l'intervalle

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} T_1 \, dx = \frac{\partial}{\partial t} (T_{1,i} \, h_1)$$

L'équation (12) s'écrit, en évaluant la dérivée par rapport au temps :

$$\left(T_{1,i}^{n+1} - T_{1,i}^{n}\right) \frac{h_1}{\partial t} = a_1 \left[\frac{\partial T_1}{\partial x}(i+\tfrac{1}{2}) - \frac{\partial T_1}{\partial x}(i-\tfrac{1}{2}) \right] + S_j^n \, h_1$$

or

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}(i+\tfrac{1}{2}) = \frac{T_{1,i+1} - T_{1,i}}{h_1}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}(i-\tfrac{1}{2}) = \frac{T_{1,i} - T_{1,i-1}}{h_1}$$

Sous forme discrétisée l'équation (12) devient :

$$\frac{T_{1,i}^{n+1} - T_{1,i}^{n}}{\delta t} = \frac{a_1}{h_1^2} \left[T_{1,i+1} - 2\,T_{1,i} + T_{1,i-1} \right] + S_j^n \qquad (13)$$

Dans le second membre de l'équation (13) les températures sont écrites sans indice caractérisant l'instant où ces températures sont prises. La méthode de Crank-Nicholson consiste à écrire cette équation sous deux formes : l'une faisant intervenir les températures à n δt, l'autre faisant intervenir les températures à (n+1) δt et à pondérer

ces équations par un paramètre θ compris entre 0 et 1.

$$\frac{T_{1,i}^{n+1} - T_{1,i}^{n}}{\delta t} = \frac{a_1}{h_1^2}\,\theta\left[T_{1,i+1}^{n+1} - 2\,T_{1,i}^{n+1} + T_{1,i-1}^{n+1}\right]$$

$$+ \frac{a_1}{h_1^2}\,(1-\theta)\left[T_{1,i+1}^{n} - 2\,T_{1,i}^{n} + T_{1,i-1}^{n}\right] + S_j^n \qquad (14)$$

avec $$S_j^n = A \cdot P^* \,(\vartheta(t) - \vartheta_o)\,\frac{\sin\frac{\alpha k}{2}}{\frac{\alpha k}{2}}\cos\left[\alpha\left(\overline{j-1}\;k - \frac{\ell}{2}\right)\right] \qquad (15)$$

$2 \leqslant i \leqslant n_1 - 1$

$o \leqslant \theta \leqslant 1$

Pour θ=0 la méthode aux différences finies est une méthode explicite, pour θ=1 la méthode devient implicite.

L'étude de la stabilité d'une équation ainsi discrétisée [16] amène à choisir $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$, cas pour lesquels le pas en temps n'est soumis à aucune condition.

L'équation (14) est valable pour $2 \leqslant i \leqslant n_1 - 1$. Les cas i=1 et $i=n_1$ correspondent aux conditions limites.

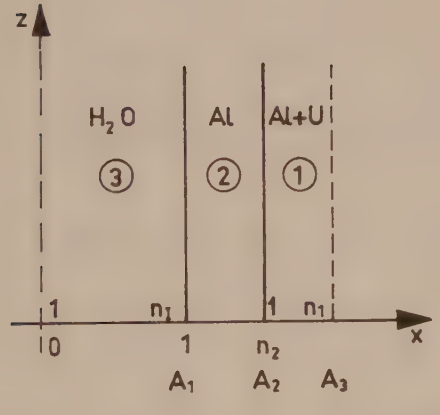

Figure 20

Pour les autres milieux, la gaine et le modérateur, les équations sont identiques. Le nombre de points pris dans la gaine est n_2 , le pas correspondant est :

$$h_2 = \frac{A_2 - A_1}{n_2 - 1}$$

Le nombre de points pris dans le modérateur est n_I , le pas correspondant est :

$$h = \frac{A_1}{n_I - 1}$$

Le découpage en z est identique à celui défini pour le combustible.

Les équations discrétisées sont donc les suivantes :

$$\frac{T_{2,i}^{n+1} - T_{2,i}^{n}}{\delta t} = \frac{a_2}{h_2^2}\,\theta\left[T_{2,i+1}^{n+1} - 2\,T_{2,i}^{n+1} + T_{2,i-1}^{n+1}\right] + \frac{a_2}{h_2^2}\,(1-\theta)\left[T_{2,i+1}^{n} - 2\,T_{2,i}^{n} + T_{2,i-1}^{n}\right] \qquad (16)$$

$2 \leqslant i \leqslant n_2 - 1$

$$\frac{T_{3,i}^{n+1} - T_{3,i}^{n}}{\delta t} = \frac{a_3}{h^2}\,\theta\left[T_{3,i+1}^{n+1} - 2\,T_{3,i}^{n+1} + T_{3,i-1}^{n+1}\right] + \frac{a_3}{h^2}\,(1-\theta)\left[T_{3,i+1}^{n} - 2\,T_{3,i}^{n} + T_{3,i-1}^{n}\right] \qquad (17)$$

$2 \leqslant i \leqslant n_I - 1$

Il reste maintenant à exprimer les conditions d'interface pour $i=1$, $i=n_I$, $i=n_2$ et $i=n_1$.

3.3. - Conditions aux limites

3.3.1. Condition pour l'axe de symétrie du canal ($x=0$; $i=1$)

Cette condition est la suivante : $\frac{\partial T_3}{\partial x}(0) = 0$. Il suffit pour exprimer cette condition de faire dans l'équation (17) $T_{i+1} = T_{i-1}$ pour $i=1$

$$\frac{T_{3,1}^{n+1} - T_{3,1}^{n}}{\delta t} = \frac{2a_3}{h^2}\,\theta\left[T_{3,2}^{n+1} - T_{3,1}^{n+1}\right] + \frac{2a_3}{h^2}\,(1-\theta)\left[T_{3,2}^{n} - T_{3,1}^{n}\right] \qquad (18)$$

3.3.2. Conditions à l'interface eau-gaine ($x=A_1$)

Ces conditions sont l'égalité des températures et l'égalité des flux calorifiques

$$T_3(A_1) = T_2(A_1)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(A_1) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1)$$

La première condition s'écrit :

$$T_{3,n_I}^{n} = T_{2,1}^{n} \qquad \forall n \qquad (19)$$

La seconde condition est discrétisée en Annexe V. Le résultat des calculs est le suivant:

$$\frac{T_{2,1}^{n+1} - T_{2,1}^{n}}{\delta t}\left(1 + \frac{\lambda_3\, h\, a_2}{\lambda_2\, h_2 a_3}\right) = \frac{2a_2}{h_2}\left\{\theta\,\frac{T_{2,2}^{n+1} - T_{2,1}^{n+1}}{h_2} - \theta\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\,\frac{T_{2,1}^{n+1} - T_{3,n_I-1}^{n+1}}{h}\right.$$

$$\left. + (1-\theta)\,\frac{T_{2,2}^{n} - T_{2,1}^{n}}{h_2} - (1-\theta)\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\,\frac{T_{2,1}^{n} - T_{3,n_I-1}^{n}}{h}\right\} \qquad (20)$$

3.3.3. Conditions à l'interface gaine-combustible ($x=A_2$)

Les conditions à l'interface gaine-combustible sont, comme précédemment, l'égalité des températures et l'égalité des flux calorifiques

$$T_2(A_2) = T_1(A_2)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_2) = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(A_2)$$

La première condition s'exprime par :

$$T_{2,n_2} = T_{1,1} \qquad \forall n \qquad (21)$$

La seconde condition, tout à fait analogue à (20), est déterminée en Annexe V :

$$\frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{1,1}^{n}}{\delta t}\left(1 + \frac{\lambda_2\, h_2\, a_1}{\lambda_1\, h_1\, a_2}\right) = S_j^n + \frac{2a_1}{h_1}\left\{\theta\,\frac{T_{1,2}^{n+1} - T_{1,1}^{n+1}}{h_1} - \theta\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{2,n_2-1}^{n+1}}{h_2}\right.$$

$$\left. + (1-\theta)\,\frac{T_{1,2}^{n} - T_{1,1}^{n}}{h_1} - (1-\theta)\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\frac{T_{1,1}^{n} - T_{2,n_2-1}^{n}}{h_2}\right\} \quad (22)$$

3.3.4. Condition pour l'axe de symétrie du combustible ($x=A_3$; $i=n_1$)

Cette condition est la suivante : $\frac{\partial T_1}{\partial x}(A_3) = 0$. Comme précédemment c'est un cas particulier de l'équation (14) dans laquelle il suffit de faire :

$$T_{i-1} = T_{i+1} \quad \text{pour} \quad i=n_1$$

$$\frac{T_{1,n_1}^{n+1} - T_{1,n_1}^{n}}{\delta t} = \frac{2a_1}{h_1^2}\,\theta\left[T_{1,n_1-1}^{n+1} - T_{1,n_1}^{n+1}\right] + \frac{2a_1}{h_1^2}(1-\theta)\left[T_{1,n_1-1}^{n} - T_{1,n_1}^{n}\right] + S_j^n \quad (23)$$

3.4. - Système linéaire permettant de déterminer les températures

En ordonnant l'ensemble des équations discrétisées, le système linéaire qui définit les températures apparait, pour j fixé, sous la forme suivante :

$i = 1$ ($x=0$)

$$\left(1 + \frac{2a_3}{h^2}\,\theta\,\delta t\right) T_{3,1}^{n+1} - \frac{2a_3}{h^2}\,\theta\,\delta t\, T_{3,2}^{n+1} = \left[1 - \frac{2a_3}{h^2}(1-\theta)\delta t\right] T_{3,1}^{n} + \frac{2a_3}{h^2}(1-\theta)\delta t\, T_{3,2}^{n} \quad (24)$$

$2 \leqslant i \leqslant n_I - 1$ milieu 3

$$-a_3\,\frac{\theta\,\delta t}{h^2}\,T_{3,i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{2a_3\,\theta}{h^2}\,\delta t\right) T_{3,i}^{n+1} - a_3\,\frac{\theta\,\delta t}{h^2}\,T_{3,i+1}^{n+1} = \frac{a_3}{h^2}(1-\theta)\delta t\, T_{3,i-1}^{n}$$

$$+\left[1 - \frac{2a_3}{h^2}\,(1-\theta)\,\delta t\right] T_{3,i}^{n} + \frac{a_3}{h^2}\,(1-\theta)\,\delta t\, T_{3,i+1}^{n} \quad (25)$$

$i = n_I$ dans le milieu 3 ($x=A_1$)

$i = 1$ dans le milieu 2 ($x=A_1$)

$$-\frac{2a_2}{h_2 h}\,\theta\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\,\delta t\, T_{3,n_I-1}^{n+1} + \left[1 + \frac{\lambda_3\, a_2\, h}{\lambda_2\, a_3\, h_2} + \frac{2a_2\,\theta\,\delta t}{h_2}\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h}\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)\right] T_{2,1}^{n+1} - \frac{2a_2}{h_2^2}\,\theta\,\delta t\, T_{2,2}^{n+1}$$

$$= \frac{2a_2}{h_2 h}\,\delta t(1-\theta)\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\,T_{3,n_I-1}^{n} + \left[1 + \frac{\lambda_3\, a_2\, h}{\lambda_2\, a_3\, h_2} - \frac{2a_2(1-\theta)\delta t}{h_2}\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h}\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)\right] T_{2,1}^{n}$$

$$+ \frac{2a_2}{h_2^2}\,(1-\theta)\delta t\, T_{2,2}^{n} \quad (26)$$

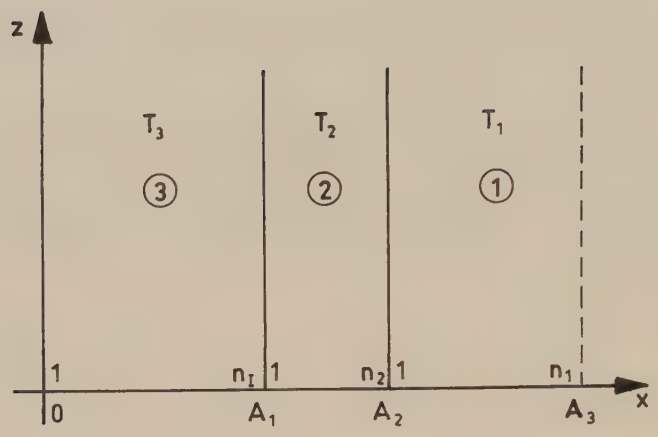

Figure 21

$2 \leqslant i \leqslant n_2-1$ milieu 2

$$-\frac{a_2\ \theta\ \delta t}{h_2^2}\ T^{n+1}_{2,i-1} + \left(1 + \frac{2a_2\ \delta t\ \theta}{h_2^2}\right) T^{n+1}_{2,i} - \frac{a_2\ \theta\ \delta t}{h_2^2}\ T^{n+1}_{2,i+1}$$

$$= \frac{a_2}{h_2^2}\ (1-\theta)\ \delta t\ T^{n}_{2,i-1} + \left[1 - \frac{2a_2}{h_2^2}\ (1-\theta)\delta t\right] T^{n}_{2,i} + \frac{a_2}{h_2^2}(1-\theta)\delta t\ T^{n}_{2,i+1} \qquad (27)$$

$i = n_2$ dans le milieu 2 $(x=A_2)$

$i = 1$ dans le milieu 1 $(x=A_2)$

$$-\frac{2a_1}{h_1\ h_2}\ \theta\ \delta t \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ T^{n+1}_{2,n_2-1} + \left[1 + \frac{\lambda_2\ h_2\ a_1}{\lambda_1\ h_1\ a_2} + \frac{2a_1}{h_1}\ \theta\ \delta t \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right] T^{n+1}_{1,1} - \frac{2a_1}{h_1^2}\ \theta\ \delta t\ T^{n+1}_{1,2}$$

$$= \frac{2a}{h_1 h_2}(1-\theta)\delta t\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ T^{n}_{2,n_2-1} + \left[1 + \frac{\lambda_2\ h_2\ a_1}{\lambda_1\ h_1\ a_2} - \frac{2a_1}{h_1}(1-\theta)\delta t \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right] T^{n}_{1,1}$$

$$+ \frac{2a_1}{h_1^2}\ (1-\theta)\ \delta t\ T^{n}_{1,2} + S^n_j \qquad (28)$$

$2 \leqslant i \leqslant n_1-1$ milieu 1

$$-\frac{a_1\ \theta\ \delta t}{h_1^2}\ T^{n+1}_{1,i-1} + \left(1 + \frac{2a_1}{h_1^2}\ \theta\ \delta t\right) T^{n+1}_{1,i} - \frac{a_1\ \theta\ \delta t}{h_1^2}\ T^{n+1}_{1,i+1}$$

$$= \frac{a_1}{h_1^2}(1-\theta)\ \delta t\ T^{n}_{1,i-1} + \left[1 - \frac{2a_1}{h_1^2}(1-\theta)\ \delta t\right] T^{n}_{1,i} + \frac{a_1}{h_1^2}(1-\theta)\ \delta t\ T^{n}_{1,i+1} + S^n_j \qquad (29)$$

$i = n_1$ $(x=A_3)$

$$-\frac{2a_1\ \theta\ \delta t}{h_1^2}\ T^{n+1}_{1,n_1-1} + \left(1 + \frac{2a_1}{h_1^2}\ \theta\ \delta t\right) T^{n+1}_{1,n_1} = \frac{2a_1}{h_1^2}(1-\theta)\delta t\ T^{n}_{1,n_1-1} + \left[1 - \frac{2a_1}{h_1^2}(1-\theta)\delta t\right] T^{n}_{1,n_1} + S^n_j \qquad (30)$$

La matrice du système est tridiagonale. Elle s'inverse en utilisant une méthode de pivot qui permet de la diagonaliser [17].

La valeur de θ prise d'abord égale à $\frac{1}{2}$, a été fixée finalement à $\theta=1$. Le système résolu est alors entièrement implicite. La détermination des températures se fait ainsi tant qu'il n'y a pas perturbation, c'est-à-dire tant qu'il n'y a pas de cote en z pour laquelle le test d'ébullition soit vérifié. Rappelons en particulier ce test d'ébullition qui se fait à chaque instant pour l'ensemble des valeurs de $z \in]o,\ell[$. Ce test consiste à voir le signe de l'expression [Annexe IV].

$$\left(T_p + R_1 \frac{\partial T_p}{\partial x}\right)\left(a - T_s\ L\left\{1 - \frac{2\ \sigma\ (1 + \cos\ \theta)}{P\ R_1}\right\}\right) - a\ T_s$$

IV. - DETERMINATION DU POTENTIEL DES VITESSES

4.1. - Introduction

Nous faisons l'hypothèse que le mouvement des particules d'eau dans le demi-canal est irrotationnel dès qu'il y a création de vapeur. Nous devons donc résoudre $\Delta\Phi = 0$ dans un domaine où l'une des parois évolue au cours du temps : la frontière eau-vapeur. Les conditions de bord ont déjà été précisées au chapitre II, paragraphe 3.4, lors de l'exposé théorique. Rappelons sur un schéma l'ensemble de ces conditions. Nous avons supposé la frontière mobile (Γ) constituée de deux portions de courbes.

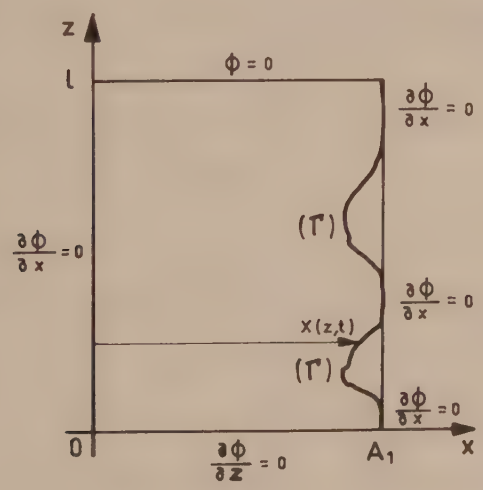

Figure 22

Conditions de Dirichlet

$\Phi = 0$ pour $z=\ell$ (31)

$\Phi = \Phi_\Gamma$ Φ_Γ est donné (32)

Conditions de Neumann

$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$ pour $x=0$ $\forall z$ (33)

$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$ pour $x=A_1$ $z \in C_\Gamma$ (34)

$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$ pour $z=0$ $\forall x$ (35)

En général la résolution d'un Laplacien dans un domaine où une paroi est mobile se ramène à la résolution d'une équation plus compliquée en rendant fixe la paroi mobile. Dans notre cas, nous allons voir qu'il est possible d'obtenir une solution approchée en tenant compte de la géométrie du canal.

Nous aboutirons ainsi à une solution analytique. Rappelons auparavant de quelle façon est définie la paroi mobile, frontière entre l'eau et la vapeur.

4.2. - Détermination de la paroi mobile

L'abscisse X(z,t) du point appartenant à la paroi mobile est déterminée par les deux grandeurs : épaisseur y(z,t) de la vapeur et épaisseur e(z,t) de la microcouche d'eau.

$$X(z,t) = A_1 - y(z,t) - e(z,t)$$

Les équations qui définissent y(z,t) et e(z,t) sont établies en Annexe VI.

Le traitement numérique de l'équation différentielle qui donne y

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\rho_3 - \rho_v}\left[y\ \rho_v \frac{1}{T_s}\frac{\partial T_s}{\partial t}\left(\frac{a}{T_s} - 1\right) - \rho_3\ u_X\right]$$

se fait par une méthode de prédicteur-correcteur :

$$y^* = y^n + \frac{\delta t}{\rho_3 - \rho_v^n}\left[y^n\ \rho_v^n \frac{1}{T_s^n}\frac{T_s^n - T_s^{n-1}}{\delta t}\left(\frac{a}{T_s^n} - 1\right) - \rho_3\ u_X^n\right] \qquad (36)$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\delta t}{2}\left[\frac{1}{\rho_3 - \rho_v^n}\left(\frac{y^n\ \rho_v^n}{T_s^n}\ \frac{T_s^n - T_s^{n-1}}{\delta t}\left(\frac{a}{T_s^n} - 1\right) - \rho_3\ u_X^n\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho_3 - \rho_v^{n+1}}\left(\frac{y^*\ \rho_v^{n+1}}{T_s^{n+1}}\ \frac{T_s^{n+1} - T_s^n}{\delta t}\left(\frac{a}{T_s^{n+1}} - 1\right) - \rho_3\ u_X^*\right)\right] \qquad (37)$$

Dans ces expressions $\rho_v = \frac{P\ M}{R\ T_s}$ avec $P = b\ e^{-\frac{a}{T_s}}$, qui est une loi connue, liant la température de saturation à la pression. Remarquons dans l'équation (37) le terme T_s^{n+1}. Cette quantité est déterminée car, comme nous le verrons, le calcul commence par la détermination des températures.

Le calcul de e(z,t) se fait par l'intermédiaire de $e^2(z,t)$ qui obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial t}\ e^2 = -\frac{2\ \lambda_3}{\mathcal{L}\rho_3}\ (T_p - T_s)$$

Les températures T_p et T_s étant connues, comme nous venons de le dire, le traitement numérique de cette équation se fait par la formule suivante :

$$(e^2)^{n+1} = (e^2)^n - \frac{\lambda_3}{\mathcal{L}\rho_3}\ \delta t\left[T_p^{n+1} - T_s^{n+1} + T_p^n - T_s^n\right] \qquad (38)$$

expression qui correspond simplement à une intégration pour la méthode des trapèzes.

4.3. - Résolution du Laplacien $\Delta\Phi = 0$

Pour résoudre l'équation : $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$

nous tiendrons compte de la géométrie du canal, en remarquant que la hauteur ℓ est 60 cm et la demi-largeur A_1 est 0,106 cm. Nous ramenons ce rectangle (perturbé par l'ébullition) à un carré en faisant le changement de variables suivant :

$$\zeta = \frac{x}{A_1} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\omega = \frac{z}{\ell} \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial \omega}$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} = 0 \tag{39}$$

avec $$\varepsilon = \frac{A_1^2}{\ell^2} \tag{40}$$

ε étant de l'ordre de $3\ 10^{-6}$, nous cherchons Φ sous la forme d'un développement en

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \ldots \tag{41}$$

En limitant ce développement aux termes en ε (premier ordre) nous devons résoudre les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \zeta^2} = 0 \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \omega^2} = 0 \tag{43}$$

avec les conditions de bord définies pour Φ et qui doivent être reportées sur Φ_0 et Φ_1 indépendemment de ε. Ces conditions sont notifiées sur le schéma ci-dessous.

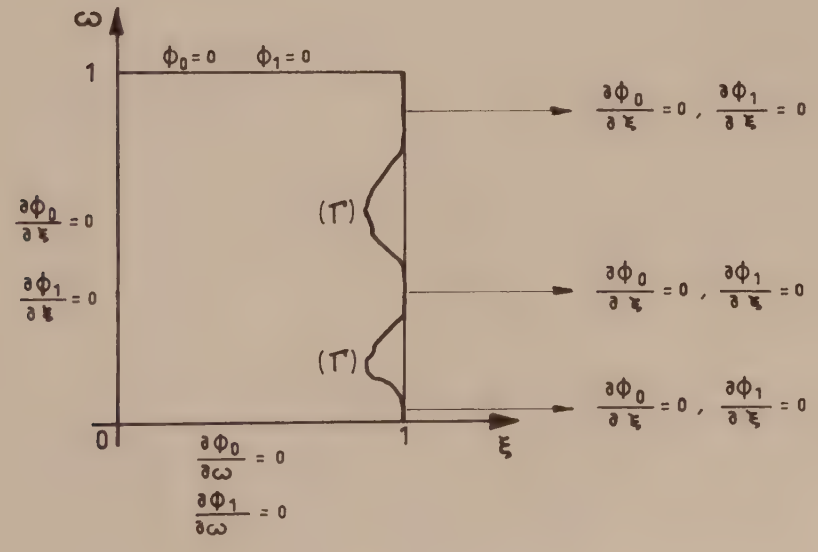

Figure 23

La résolution des équations (42) et (43) est donnée en Annexe VIII en tenant compte du fait que Φ est donné le long de Γ.

Φ_Γ est d'ailleurs déterminée par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \Phi_\Gamma}{\partial t} = - \frac{P}{\rho_3} - \frac{1}{2}(u^2 + w^2) - gz + \frac{\varphi(t)}{\rho_3}$$

que l'on résout par une méthode prédicteur-correcteur.

$$\Phi_\Gamma^* = \Phi^n + \delta t \left\{ - \frac{P^n}{\rho_3} - \frac{1}{2}\left[(u^n)^2 + (w^n)^2\right] - g(j-1)k + \frac{\varphi^n}{\rho^3} \right\} \qquad (44)$$

où k désigne le pas en z et φ^n est définie par :

$$\varphi^n = P_o + \frac{\rho_3}{2A_1} \int_o^{A_1} (w^n)^2_{z=\ell}\, dx$$

Le correcteur est donné par :

$$\Phi_\Gamma^{n+1} = \Phi^n + \frac{\delta t}{2} \left\{ - \frac{P^n}{\rho_3} - \frac{1}{2}\left((u^n)^2 + (w^n)^2\right) - g(j-1)k + \frac{\varphi^n}{\rho^3} \right.$$
$$\left. - \frac{P^{n+1}}{\rho^3} - \frac{1}{2}\left((u^*)^2 + (w^*)^2\right) - g(j-1)k + \frac{\varphi^*}{\rho^3} \right\} \qquad (45)$$

où $\varphi^* = P_o + \frac{\rho_3}{2 A_1} \int_o^{A_1} (w^{*2})_{z=\ell}\, dx$

Ceci donne Φ_Γ de façon discrète, suivant le maillage en z. Les conditions de bords étant différentes suivant les cotes où il y a ébullition ou non, il faut distinguer différents domaines.

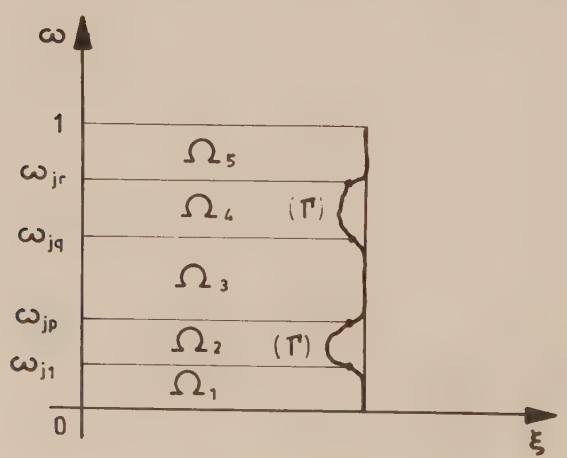

Figure 24

Ceux-ci figurent sur le schéma ci-dessus.

ω_{j_1} désigne la cote du premier point en ébullition pour Ω_2

ω_{jp} désigne la cote du dernier point en ébullition pour Ω_2

ω_{jq} désigne la cote du premier point en ébullition pour Ω_4

ω_{jr} désigne la cote du dernier point en ébullition pour Ω_4

Les résultats de la résolution de (42) et (43) sont les suivants.

Dans Ω_1 $$\Phi = \Phi_o\ (\omega_{j_1}) \tag{46}$$

Dans Ω_2 $$\Phi(\zeta,\omega_j) = \Phi_o(\omega_j) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2\ \Phi_o}{\partial\ \omega^2}\ (\omega_j) \left[\left(\frac{X_j}{A_1}\right)^2 - \zeta^2\right] \tag{47}$$

$$\omega_{j_1} \leqslant \omega_j \leqslant \omega_{jp}$$

Dans Ω_3 $$\Phi = \frac{\Phi_o(\omega_{jp}) - \Phi\ (\omega_{jq})}{\omega_{jp} - \omega_{jq}}\ (\omega_j - \omega_{jp}) + \Phi_o(\omega_{jp}) \tag{48}$$

$$\omega_{jp} \leqslant \omega_j \leqslant \omega_{jq}$$

Dans Ω_4 $$\Phi(\zeta,\omega_j) = \Phi_o(\omega_j) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2\ \Phi_o}{\partial\ \omega^2}\ (\omega_j) \left[\left(\frac{X_j}{A_1}\right)^2 - \zeta^2\right] \tag{49}$$

$$\omega_{jq} \leqslant \omega_j \leqslant \omega_{jr}$$

Dans Ω_5 $$\Phi = \Phi_o(\omega_{jr})\ \frac{\omega_{j-1}}{\omega_{jr-1}} \tag{50}$$

Pour ces relations $\Phi_o = \Phi_r$ qui est connu pour les points en ébullition.
De plus, la dérivée seconde $\frac{\partial^2\ \Phi_o}{\partial\ \omega^2}(\omega_j)$ est donnée par une formule de discrétisation classique :

$$\frac{\partial^2\ \Phi_o}{\partial\ \omega^2}\ (\omega_j) = \frac{\Phi_o(\omega_{j+1}) - 2\ \Phi_o(\omega_j) + \Phi_o(\omega_{j-1})}{\Delta\omega^2}$$

4.4. - Détermination des vitesses

Cette détermination se fait par les relations :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{A_1}\ \frac{\partial}{\partial \zeta}\ \Phi$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\ell}\ \frac{\partial}{\partial\ \omega}\ \Phi$$

Dans Ω_1 les deux vitesses sont nulles $u=0$ et $w=0$; il faut remarquer, puisque nous avons supposé le canal fermé en bas, que l'ébullition ne perturbe pas les vitesses pour les cotes les plus basses.

Dans Ω_2 et Ω_4, il y a deux composantes de vitesses.

$$u = -\ \frac{\varepsilon\,\zeta}{A_1}\ \frac{\partial^2\ \Phi_o}{\partial\ \omega^2}\ (\omega_j) = -\ x\ \frac{\partial^2\ \Phi_{o,j}}{\partial\ z^2} \tag{51}$$

$w = \frac{1}{2\,\ell\,\Delta\omega}\ (\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1})$ que l'on écrit sous la forme :

$$w = \frac{1}{2k}\left[\Phi_{o\,j+1} - \Phi_{o\,j-1} + \frac{\left(X^2_{j+1} - x^2\right)}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{o,j+1}}{\partial z^2} - \frac{\left(X^2_{j-1} - x^2\right)}{2}\frac{\partial^2 \Phi_{o,j-1}}{\partial z^2}\right] \quad (52)$$

k désigne le pas en z.

Remarquons que u est une fonction linéaire en x. Ceci interviendra dans la discrétisation des températures dans l'eau du canal.

Dans Ω_3 , Φ ne dépend que de ω

$$u = 0$$

$$w = \frac{\Phi_{o,jp} - \Phi_{o,jq}}{k\,(j,p - j,q)} \quad \text{qui est une constante} \quad (53)$$

Dans Ω_5 , nous obtenons pour les vitesses :

$$u = 0$$

$$w = \frac{\Phi_{o,jr}}{(\omega_{jr-1})} = \frac{\Phi_{o,j,r}}{(j,r-1)\ k-\ell} \quad (54$$

Pour terminer ce paragraphe, nous donnerons l'allure du potentiel en fonction de ω. Cette courbe met bien en évidence la perturbation apportée par l'ébullition.

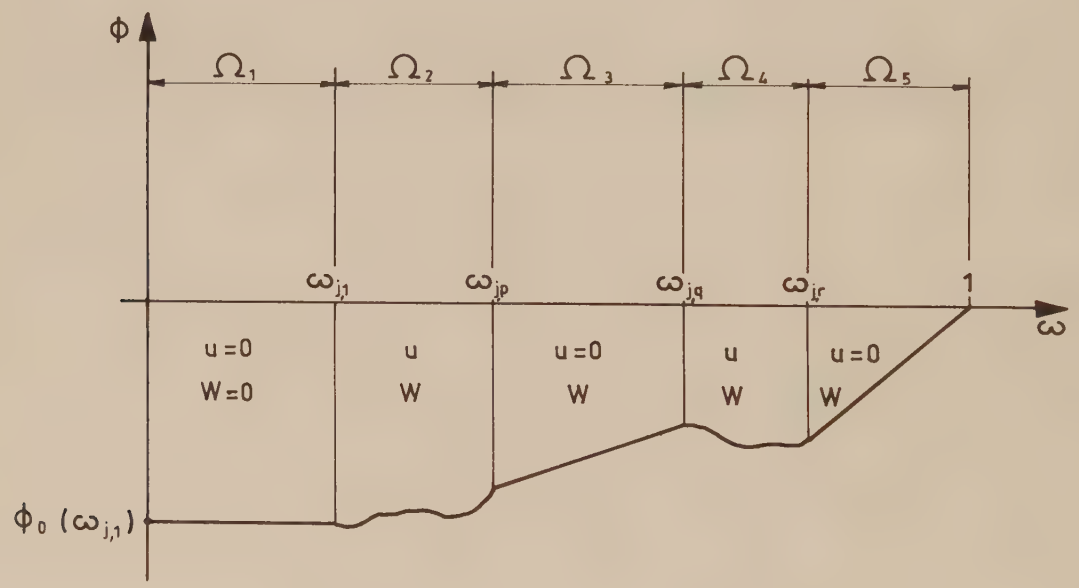

Figure 25

V. - DETERMINATION DES TEMPERATURES AVEC PERTURBATION

5.1. - Introduction

La détermination des températures, lorsqu'il n'y a pas ébullition, ne pose que peu de problèmes, si ce n'est quelques précautions concernant la stabilité numérique lorsque les équations de conduction sont discrétisées. La méthode de Crank-Nicholson est satisfaisante à ce sujet et restera valable pour les milieux gaine et combustible. La création d'une microcouche d'eau le long de la paroi, et d'un film de vapeur donnant naissance à des vitesses dans le modérateur amènent des problèmes nouveaux. En particulier la façon de discrétiser l'équation de convection dans l'eau tiendra compte des vitesses existantes. Les conditions de transferts de chaleur entre le modérateur, le film de vapeur et la microcouche d'eau doivent prendre en considération les équations de conservation de masse et de conservation d'énergie.

Les équations à discrétiser sont les suivantes :

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + S(z,t) \qquad (55)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \qquad (56)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} + u \frac{\partial T_3}{\partial x} + w \frac{\partial T_3}{\partial z} = a_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \qquad (57)$$

Les deux premières équations ont déjà été discrétisées, la dernière équation fera l'objet d'une discrétisation particulière.

5.2. - Discrétisation des températures dans l'eau

La méthode de discrétisation utilisée dans l'eau du demi-canal est particulière à notre problème. Elle tient compte notamment du fait que la composante horizontale u de la vitesse est une fonction linéaire en x. L'équation discrète est établie à une cote j où il y a ébullition, c'est-à-dire où $X_j \neq A_1$ (cf. Annexe IX). Le cas où $X_j = A_1$, point où il n'y a pas ébullition, n'apparaît que comme un cas particulier.

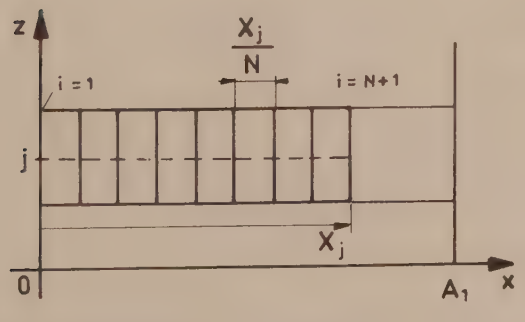

Figure 26

Chaque tranche d'eau de cote j, est découpée en N intervalles et comporte donc N+1 points de température. Le pas h dans l'eau vaut alors : $h = \frac{X_j}{N}$. Ce maillage est le même quel que soit j et t.

Nous noterons T simplement, la température dans l'eau — et n'écrirons l'indice j que s'il est indispensable.

L'équation discrétisée se formule ainsi :

$$T_i^{n+1} - T_i^n = a_3\ \delta t \frac{N^2}{X^2}\left[T_{i+1}^{n+1} - 2\,T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}\right]$$
$$+ \frac{(i-\frac{1}{2})}{X}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^+\left[T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}\right]$$
$$- \frac{(i-\frac{3}{2})}{X}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^-\left[T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}\right]$$
$$+ \frac{\delta t}{dz}\left[w_{i,j}^{+n}\left(T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n\right) + w_{i,j+1}^{-n}\left(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n\right)\right] \qquad (58)$$

$2 \leqslant i \leqslant N$

Les termes en $w\frac{\partial T}{\partial z}$ sont pris à l'instant t (le calcul se faisant à t+δt), et sont considérés comme un second membre. dX et u_X sont aussi pris à l'instant t.

Rappelons les définitions des fonctions f^+ et f^- :

$$f^+ = f \quad f \geqslant 0$$
$$= 0 \quad f < 0$$

$$f^- = -f \quad f \leqslant 0$$
$$= 0 \quad f > 0$$

Cette équation générale prend des formes particulières pour exprimer les conditions aux limites. C'est-à-dire pour i=1 $\frac{\partial T}{\partial x}(0) = 0$, et pour i=N+1 $T_{N+1} = T_s$. Ces équations établies en Annexe X, s'écrivent ainsi :

a) $i = 1 \qquad (x=0)$

$$T_1^{n+1} - T_1^n = 2\,a_3\ \delta t \frac{N^2}{X^2}\left[T_2^{n+1} - T_1^{n+1}\right] + \frac{1}{X}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^+\left[T_2^{n+1} - T_1^{n+1}\right]$$
$$+ \frac{\delta t}{dz}\left[w_{1,j}^{+n}\left(T_{1,j-1}^n - T_{1,j}^n\right) + w_{1,j+1}^{-n}\left(T_{1,j+1}^n - T_{1,j}^n\right)\right] \qquad (59)$$

b) $i = N+1 \qquad (x=X)$

$$T_s^{n+1} - T_{N+1}^n = a_3\ \delta t \frac{2N}{X}\frac{\partial T_3}{\partial x}(X) - a_3\ \delta t \frac{2N^2}{X^2}\left(T_s^{n+1} - T_N^{n+1}\right)$$
$$- \frac{(2N-1)}{X}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^-\left(T_s^{n+1} - T_N^{n+1}\right)$$
$$+ \frac{\delta t}{dz}\left[w_{N+1,j}^{+n}\left(T_{N+1,j-1}^n - T_{N+1,j}^n\right) + w_{N+1,j+1}^{-n}\left(T_{N+1,j+1}^n - T_{N+1,j}^n\right)\right] \qquad (60)$$

Nous gardons le notation T_{N+1}^n pour les termes pris à n car T_{N+1} peut être égal à T_S s'il y a eu ébullition à t, ou est égal à T_p (température de plaque) s'il n'y a pas eu ébullition à t. Ceci est précisé par les conditions de transfert d'énergie.

5.3. - Conditions de transfert d'énergie en "A_1"

Pour définir complètement le système linéaire permettant de déterminer les températures il faut tenir compte des conditions de transfert d'énergie entre vapeur, micro-

couche d'eau et plaque, vapeur et plaque,et entre eau et plaque lorsqu'il n'y a pas ébullition. Pour chacun de ces cas, les conditions sont différentes. Elles sont établies en Annexe XI.

5.3.1. Cote où il y a ébullition avec microcouche d'eau ($e \neq 0 \quad X < A_1$)

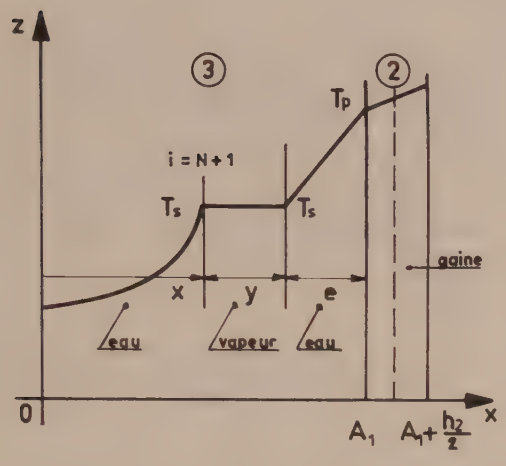

Figure 27

Le profil des températures à une telle cote est représenté sur la figure ci-contre.

Les deux conditions à exprimer sont données par les équations (67) et (68) du chapitre II paragraphe 4.3. Elles sont formulées par les relations suivantes :

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) = \lambda_3 \frac{T_p - T_s}{e}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) - \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) = y\ \rho_v \frac{\partial T_s}{\partial t}$$

$$\left[C_p + \left(\frac{a}{T_s} - 1\right)\left(\frac{\mathcal{L}\rho_3}{T_s(\rho_3 - \rho_v)} - \frac{k\,R}{M}\right)\right] - \frac{\mathcal{L}\rho_3\ \rho_v\ u_X}{\rho_3 - \rho_v}$$

Numériquement ces relations se traduisent par les équations :

$$-Z_4\ X^n\ e^n\ T_N^{n+1} + \left[2a_3\ \delta t\ N + X^n\ e^n\ (1+Z_4) + \frac{2a_3}{\lambda_3} N\ e^n\ Z_1\right] T_s^{n+1} - 2a_3\ \delta t\ N\ T_p^{n+1}$$
$$= T_s^n \left(X^n\ e^n + \frac{2a_3}{\lambda_3} N\ e^n\ Z_1\right) + \frac{2a_3\ \delta t}{\lambda_3} N\ e^n\ Z_2 + Z_3\ X^n\ e^n \qquad (61)$$

$$-\frac{2a_2\ \delta t}{h_2}\frac{\lambda_3}{\lambda_2} T_s^{n+1} + \left[e^n\left(1 + \frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\right) + \frac{2a_2\ \delta t}{h_2}\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right] T_p^{n+1} - \frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2} e^n\ T_{2,2}^{n+1} = T_p^n\ e^n \qquad (62)$$

avec les définitions suivantes :

$$Z_1 = y^n\ \rho_v^n \left[C_p + \left(\frac{a}{T_s^n} - 1\right)\left(\frac{\mathcal{L}\rho_3}{T_s^n(\rho_3 - \rho_v^n)} - \frac{k\,R}{M}\right)\right]$$

$$Z_2 = \frac{\mathcal{L}\rho_3\ \rho_v^n\ u_X^n}{\rho_3 - \rho_v^n}$$

$$Z_3 = \frac{\delta t}{dz}\left[w_{N+1,j}^{+n}\left(T_{N+1,j-1}^n - T_{s,j}^n\right) + w_{N+1,j+1}^{-n}\left(T_{N+1,j+1}^n - T_{s,j}^n\right)\right]$$

$$Z_4 = 2\ a_3\ \delta t \frac{N^2}{(X^n)^2} + \frac{(2N-1)}{X^n}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^-$$

5.3.2. Cote où il y a ébullition sans microcouche d'eau (e=0, $X < A_1$)

Les deux conditions à exprimer sont :

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) = 0$$

$$-\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) = y\ \rho_v \frac{\partial T_s}{\partial t}\left[C_p + \left(\frac{a}{T_s} - 1\right)\left(\frac{\mathcal{L}\rho_3}{T_s(\rho_3-\rho_v)} - \frac{kR}{M}\right)\right] - \frac{\mathcal{L}\rho_3\ \rho_v\ u_X}{\rho_3 - \rho_v}$$

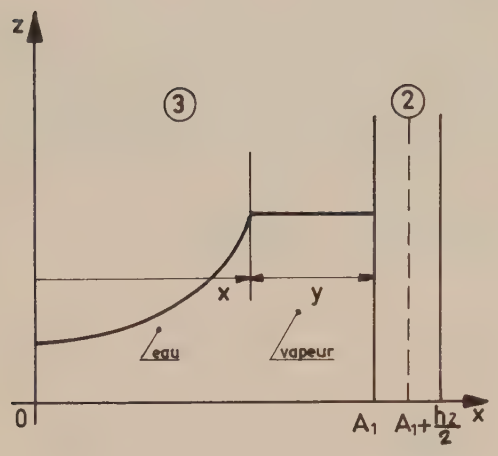

Figure 28

La première relation exprime qu'il n'y a pas d'échange de chaleur entre la plaque et la vapeur. Les deux relations qui traduisent ces conditions tiendront compte de ce fait. Elles se formulent ainsi :

$$-Z_4\ T_N^{n+1} + \left(1 + \frac{2a_3\ N\ Z_1}{\lambda_3\ X^n} + Z_4\right)\ T_s^{n+1}$$

$$= T_s^n \left(1 + \frac{2a_3\ N\ Z_1}{\lambda_3\ X^n}\right) + \frac{2a_3\,\delta t}{\lambda_3}\frac{N}{X^n} Z_2 + Z_3 \qquad (63)$$

$$T_p^{n+1}\left(1 + \frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\right) - \frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\ T_{2,2}^{n+1} = T_p^n \qquad (64)$$

Ces deux équations lient d'une part T_N^{n+1} et T_s^{n+1}, d'autre part T_p^{n+1} et $T_{2,2}^{n+1}$. Le système se découple — ce qui traduit bien le fait que la vapeur isole la plaque.

5.3.3. Cote où il n'y a pas ébullition ($X = A_1$)

Il n'y a dans ce cas que l'égalité des flux à exprimer, l'égalité des températures étant exprimée implicitement. Cette condition à imposer se traduit par la relation :

$$-\frac{2a_2\ a_3\ \delta t\ N^2}{A_1^2\ h_2\ \lambda_2}\ T_N^{n+1} + \left(\frac{a_2}{h_2\ \lambda_2} + \frac{a_3\ N}{\lambda_3\ A_1} + \frac{2a_2\ a_3\ \delta t\ N^2}{A_1^2\ h_2\ \lambda_2} + \frac{2a_2\ a_3\ \delta t\ N}{h_2^2\ \lambda_3\ A_1}\right) T_p^{n+1}$$

$$-\frac{2a_2\ a_3\ \delta t\ N}{h_2^2\ \lambda_3\ A_1}\ T_{2,2}^{n+1} = T_{N+1}^n \frac{a_2}{h_2\ \lambda_2} + \frac{a_3\ N}{\lambda_3\ A_1}\ T_p^n + \frac{Z_3\ a_2}{h_2\ \lambda_2} \qquad (65)$$

Remarquons que dans ces relations T_{N+1}^n peut être soit une température de plaque T_p si à l'instant t (indice n) il n'y a pas ébullition soit une température de saturation s'il y a effectivement ébullition à l'instant t. Ceci est précisé en Annexe XI ainsi que la définition de Z_3 dans le cas d'une cote où il n'y a pas ébullition.

5.4. - Discrétisation des températures dans la gaine et le combustible

La discrétisation des équations de températures a déjà été faite dans le cas où il n'y a pas perturbation (chapitre III, paragraphe 3.2). Nous écrirons ces équations avec $\theta=1$ pour j fixé.

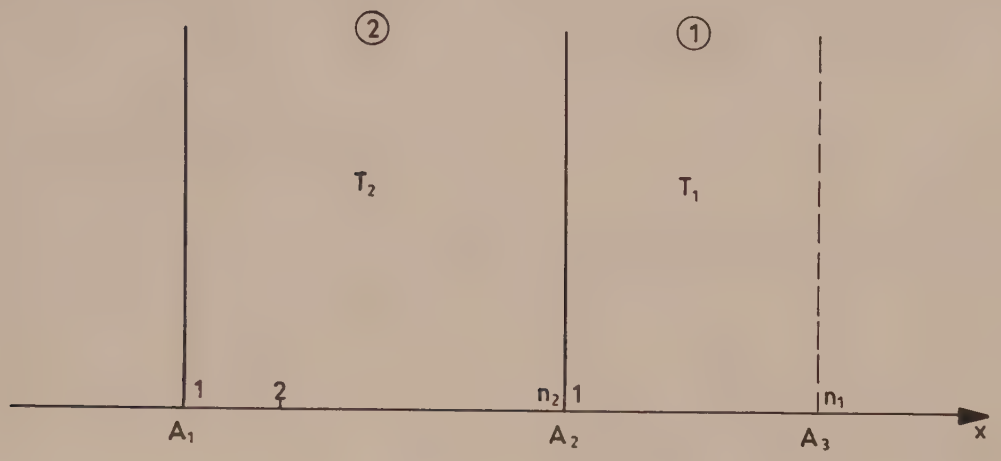

Figure 29

$2 \leqslant i \leqslant n_2-1$ milieu 2

$$-\frac{a_2\,\delta t}{h_2^2}\,T^{n+1}_{2,i-1}+\left(1+\frac{2a_2\,\delta t}{h_2^2}\right)T^{n+1}_{2,i}-\frac{a_2\,\delta t}{h_2^2}\,T^{n+1}_{2,i+1}=T^{n}_{2,i} \qquad (66)$$

$i = n_2$ dans le milieu 2 $(x=A_2)$

$i = 1$ dans le milieu 1 $(x=A_2)$

$$-\frac{2a_1\,\delta t}{h_1\,h_2}\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,T^{n+1}_{2,n_2-1}+\left[1+\frac{\lambda_2\,h_2\,a_1}{\lambda_1\,h_1\,a_2}+\frac{2a_1\,\delta t}{h_1}\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right]T^{n+1}_{1,1} \qquad (67)$$

$$-\frac{2a_1}{h_1^2}\,\delta t\;T^{n+1}_{1,2}=\left(1+\frac{\lambda_2\,h_2\,a_1}{\lambda_1\,h_1\,a_2}\right)T^{n}_{1,1}+S^{n}_{j}$$

$2 \leqslant i \leqslant n_1-1$ milieu 1

$$-\frac{a_1\,\delta t}{h_1^2}\,T^{n+1}_{1,i-1}+\left(1+\frac{2a_1\,\delta t}{h_1^2}\right)T^{n+1}_{1,i}-\frac{a_1\,\delta t}{h_1^2}\,T^{n+1}_{1,i+1}=T^{n}_{1,i}+S^{n}_{j} \qquad (68)$$

$i = n_1$ $(x=A_3)$

$$-\frac{2a_1\,\delta t}{h_1^2}\,T^{n+1}_{1,n_1-1}+\left(1+\frac{2a_1\,\delta t}{h_1^2}\right)T^{n+1}_{1,n_1}=T^{n}_{1,n_1}+S^{n}_{j} \qquad (69)$$

Ces équations complètent le système linéaire qui permet de déterminer les températures avec perturbation.

5.5. - Système linéaire donnant les températures lorsqu'il y a perturbation

Nous rassemblons ici les résultats obtenus dans les calculs précédents en écrivant le système sous sa forme programmée, dans le cas d'une cote j où il y a ébullition avec microcouche d'eau. L'indice j ne sera spécifié que s'il est indispensable et T_3 sera notée T.

$i = 1$

$$T_1^{n+1}\left(1 + 2a_3\ \delta t\ \frac{N^2}{(X^n)^2} + \frac{1}{X^n}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^+\right)$$

$$- T_2^{n+1}\left(2a_3\ \delta t\ \frac{N^2}{(X^n)^2} + \frac{1}{X^n}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^+\right) = T_1^n + \frac{\delta t}{dz}\left[w_{1,j}^{+n}\left(T_{1,j-1}^n - T_{1,j}^n\right) + w_{1,j+1}^{-n}\left(T_{1,j+1}^n - T_{1,j}^n\right)\right] \quad (70)$$

$2 \leqslant i \leqslant N$

$$- T_{i-1}^{n+1}\left(a_3\ \delta t\ \frac{N^2}{(X^n)^2} + \frac{(i - \frac{3}{2})}{X^n}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^-\right)$$

$$+ T_i^{n+1}\left(1 + 2a_3\ \delta t\ \frac{N^2}{(X^n)^2} + \frac{(i - \frac{1}{2})}{X^n}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^+ + \frac{(i - \frac{3}{2})}{X^n}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^-\right)$$

$$- T_{i+1}^{n+1}\left(a_3\ \delta t\ \frac{N^2}{(X^n)^2} + \frac{(i - \frac{1}{2})}{X^n}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^+\right)$$

$$= \frac{\delta t}{dz}\left[w_{i,j}^{+n}\left(T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n\right) + w_{i,j+1}^{-n}\left(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n\right)\right] \quad (71)$$

$$- Z_4\ X^n\ e^n\ T_N^{n+1} + \left[2a_3\ \delta t\ N + X^n\ e^n\ (1 + Z_4) + \frac{2a_3}{\lambda_3}\ N\ e^n\ Z_1\right] T_s^{n+1} - 2a_3\ \delta t\ N\ T_p^{n+1}$$

$$= T_{N+1}^n\left(X^n\ e^n + \frac{2a_3}{\lambda_3}\ N\ e^n\ Z_1\right) + 2a_3\ \frac{\delta t}{\lambda_3}\ N\ e^n\ Z_2 + Z_3\ X^n\ e^n \quad (72)$$

$$- \frac{2a_3\ \delta t}{h_2}\ \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\ T_s^{n+1} + \left[e^n\left(1 + \frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\right) + \frac{2a_2\ \delta t}{h_2}\ \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right] T_p^{n+1} - \frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\ e^n\ T_{2,2}^{n+1} = T_p^n\ e^n \quad (73)$$

Il faut alors ajouter à ces équations les relations déjà écrites (66), (67), (68) et (69).

Lorsqu'il y a ébullition sans microcouche d'eau, il faut remplacer les équations (72) et (73) par les équations (63) et (64).

S'il s'agit d'une cote où il n'y a pas ébullition, l'ensemble des équations (72) et (73) est remplacé par l'équation (65). De plus dX=0 et u_X=0. Dans tous les cas, la matrice du système est tridiagonale. Elle s'inverse en la diagonalisant, comme dans le cas du calcul des températures sans perturbation.

Il faut remarquer que dans l'équation (71), pour $j = j_{max}$ ($z=\ell$) intervient la température $T_{i,j+1}$. Cette température est égale à T_i si elle rentre en ligne de compte

dans le calcul, c'est-à-dire si $w_{i,j+1} < 0$. C'est là qu'apparaît la condition sur les températures dans l'eau $T_3 = T_i$ pour $Z \geq \ell$. Notons que $w_{i,j\,m+1}$ est bien déterminée puisque en haut du canal la vitesse w est constante et calculée à partir du dernier point en ébullition (cf. chapitre III, paragraphe 4.4, formule 54).

La condition de stabilité dans la résolution du système est la suivante :

$$\left| dX - u_X^n \, \delta t \right| < \frac{X^n}{N} \qquad (74)$$

Cette condition est une condition nécessaire, déduite de la méthode de discrétisation de l'équation de convection dans l'eau (cf. Annexe IX). Elle doit être vérifiée sur l'ensemble des points en ébullition, ce qui se réalise en modifiant le pas en temps δt.

5.6. - Nouvelle formulation des vitesses w_j

Les premiers résultats numériques ont montré que les vitesses verticales w_j (52) dépendaient peu de la variable x. Dans cette nouvelle formulation, on admet qu'il existe deux vitesses différentes entre l'interface de deux tranches en z, $w_{s,j-1}$ et $w_{e,j}$.

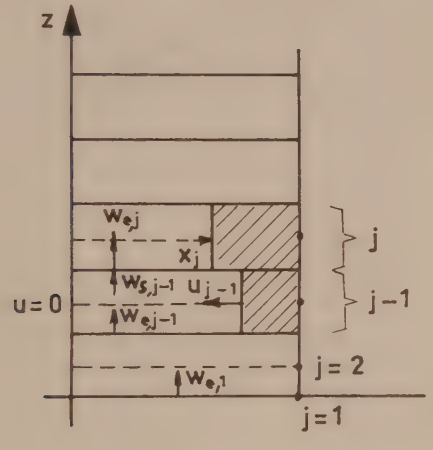

Figure 30

La conservation de la masse est respectée et pour lier ces deux vitesses à l'interface nous écrirons la conservation des débits.

Nous obtenons finalement (Annexe XII) :

$$w_{e,j} = \frac{X_{j-1}}{X_j}\left[w_{e,j-1} - \frac{u_{j-1}}{X_{j-1}} \, dz \right] \qquad (75)$$

où u_{j-1} est la vitesse au bord ($x=X_{j-1}$).

Cette vitesse est déterminée par les valeurs de $\Phi_o = \Phi_\Gamma$ puisque l'hypothèse de linéarité en x de u a été conservée.

$$u_{j-1} = X_{j-1} \frac{\partial^2 \Phi_{o,j-1}}{\partial z^2} \qquad (76)$$

La comparaison des deux calculs est faite en Annexe XII; dans un cas $\Delta\Phi = 0$ est vérifiée, dans l'autre $\Delta\Phi = 0$ n'est vérifiée qu'approximativement. Le couplage en z des équations est un peu différent dans les deux méthodes - ce que montrent les équations (3) et (11) établies dans l'Annexe XII.

C'est cette dernière façon de calculer les w, qui a été finalement programmée. Localement elle peut changer le volume de vapeur, mais globalement celui-ci varie peu, car par l'une ou l'autre méthode l'antiréactivité apportée sur la puissance du réacteur est sensiblement la même.

5.7. - Organigrammes succints des programmes

La mise au point du problème a été faite en deux stades : d'abord l'évolution de la puissance du réacteur lorsqu'il n'y a pas ébullition, puis la continuation de cette évolution dès que l'ébullition apparaît. Ceci a fait l'objet de l'écriture de deux programmes FORTRAN séparés. Le premier sans ébullition, perfore les données permettant d'enchaîner sur le second qui traite la perturbation. Cette façon de procéder a permis plus aisément de mettre au point le modèle avec ébullition.

Nous donnons ici un organigramme simplifié de chacun de ces deux programmes, en notant que la partie sans ébullition n'offre aucune difficulté. Il sera fait en outre, dans l'ensemble, référence aux formules du texte du chapitre III.

a) Programme sans ébullition

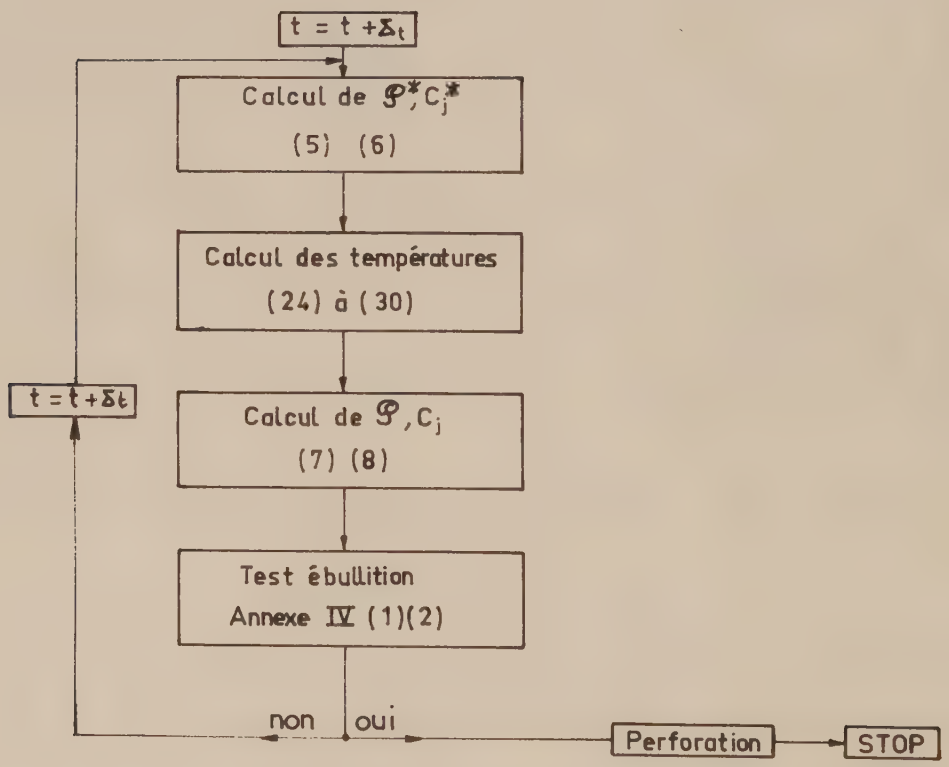

Figure 31

b) Programme avec ébullition

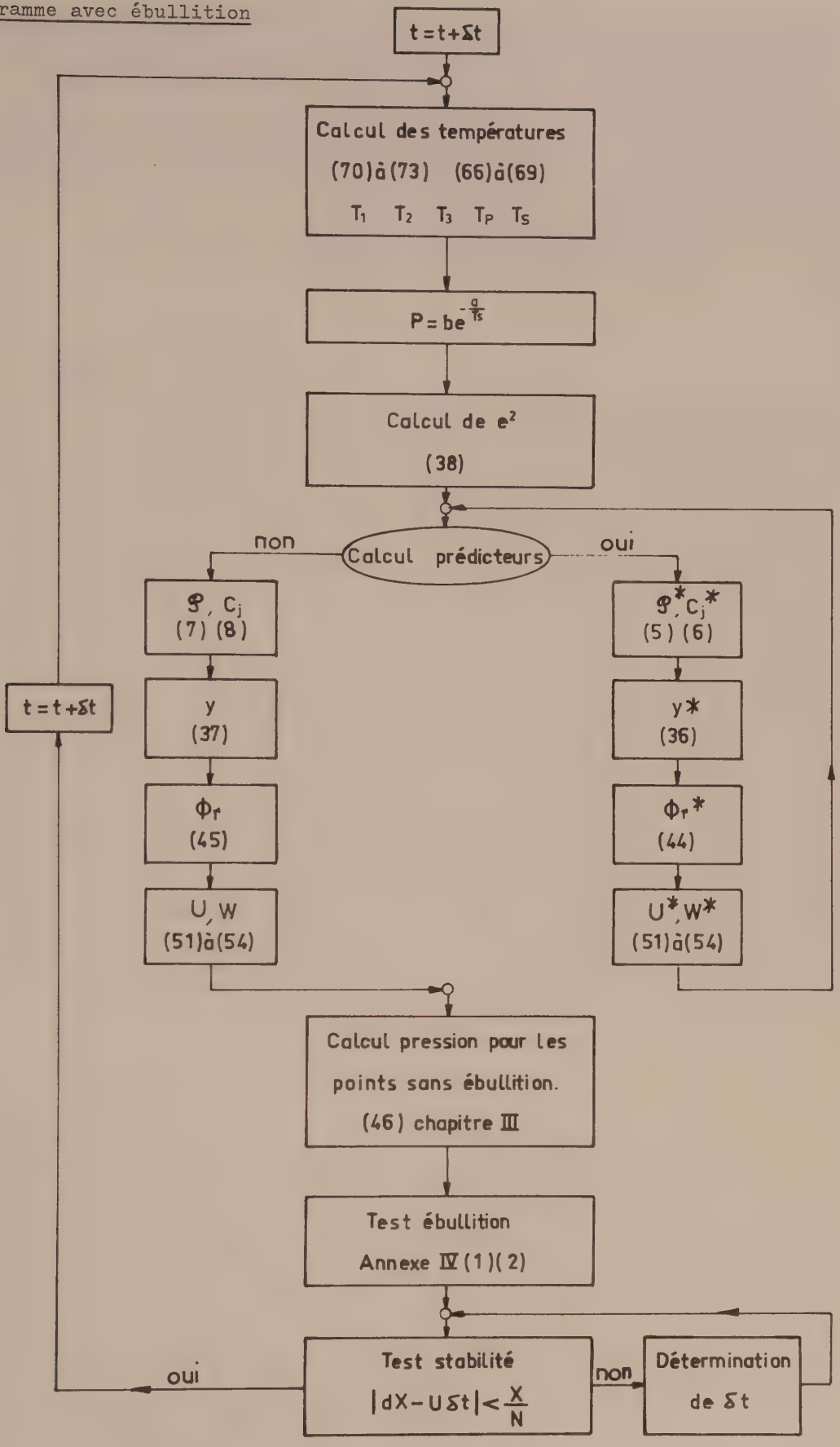

Figure 32

L'opérateur arrête le programme dès que pour une cote j, X_j est voisin de O. A cet instant, le test de stabilité n'a plus de signification, et on n'arrive d'ailleurs pas à trouver un pas en temps δt satisfaisant. Il est toujours trop grand. Ce contrôle est fait sur un écran de visualisation. Il est certain que si pour une cote j la vapeur envahit le canal, notre modèle n'est plus valable, puisque le canal se trouve coupé en deux. C'est là que se situe la limite de notre modèle. Ceci sera revu lors de l'examen des résultats numériques au chapitre suivant.

CHAPITRE IV

RESULTATS NUMERIQUES ET RESULTATS EXPERIMENTAUX

I. - INTRODUCTION

Les mesures physiques faites sur le réacteur CABRI sont relativement peu nombreuses. Les grandeurs essentielles qui ont été accessibles sont la puissance moyenne du réacteur, mesurée à l'aide de chambres à fissions, les températures de plaques données par les réponses de différents thermocouples et la réactivité donnée par un réactimètre. Il faut noter cependant que dans ce dernier cas, c'est plutôt le réactimètre qui était testé à l'aide de nos expériences. Des mesures de vitesses, ou d'épaisseurs de vapeur, étaient difficilement réalisables devant l'étroitesse du canal d'eau entre chaque plaque. Quelques essais de prises de vues à l'aide d'une caméra ultra-rapide, sur une plaque située en bordure du coeur, n'ont pas donnés de résultats probants pour essayer de détecter l'ébullition. L'évolution rapide au cours du temps du film de vapeur, et l'ordre de grandeur de son épaisseur tout le long d'une plaque de combustible, rendent très délicate toute tentative de mesure. Nous nous sommes efforcés de comparer au mieux les résultats globaux que nous pouvions obtenir par l'expérience et par la théorie, c'est-à-dire essentiellement la puissance moyenne du réacteur et l'énergie dégagée. Nous espérons, ainsi, justifier le modèle de réactivité que nous avons choisi et en particulier le modèle d'ébullition en film que nous avons adopté. Nous présenterons d'abord les résultats généraux concernant l'évolution des courbes de puissance, puis les résultats théoriques donnés par notre modèle d'ébullition en film sur trois expériences caractéristiques.

II. - RESULTATS GENERAUX

2.1. - Rappel de la méthode expérimentale utilisée sur le réacteur CABRI

Décrivons tout d'abord, brièvement, de quelle façon est menée une expérience sur le réacteur CABRI. La puissance du réacteur est stabilisée à une puissance faible (quelques centaines de watts). Les barres de contrôles sont fixées à une position déterminée pour obtenir une divergence d'une période donnée. (Ceci exige un étalonnage préalable des barres). Puis, l'éjection de la barre dite de "départ" (barre de cadmium) se fait sur l'ordre d'un calculateur RW330 qui commande par programme l'ensemble de l'excursion de puissance. De plus, ce calculateur est utilisé à l'acquisition des données et enregistre les mesures intéressantes telles que puissance et températures [18]. L'évolution de la puissance est suivie sur un écran de visualisation et la chute des barres est commandée manuellement à partir du tableau de contrôle afin d'éviter tout dommage grave au

coeur du réacteur.

2.2. - Présentation des excursions de puissance

Les excursions de puissance qui ont retenu notre attention sont celles qui ont été faites sur le réacteur CABRI, lorsque le circuit de refroidissement du réacteur est à l'arrêt. Les premières excursions de puissance étaient de périodes longues pour s'assurer du bon comportement du réacteur, puis systématiquement les périodes étaient diminuées. Nous avons ainsi obtenu un échantillonnage de périodes allant de 300 ms à 10 ms représentant environ 200 expériences.

Parmi l'ensemble de ces expériences, nous en présenterons un choix restreint, choix qui nous a semblé bien être représentatif des phénomènes. Tout d'abord, une série d'excursions de puissance où l'ébullition n'intervient pas : les conditions thermodynamiques ne sont pas remplies pour créer au cours du temps la vaporisation du modérateur, puis une série d'excursions de puissance de périodes plus courtes où il y a effectivement ébullition.

Les périodes d'excursions, où l'ébullition n'intervient pas, sont les suivantes : 116 ms, 76 ms, 49 ms et 39 ms.

Ces courbes sont représentées sur les figures 33, 34, 35 et 36.

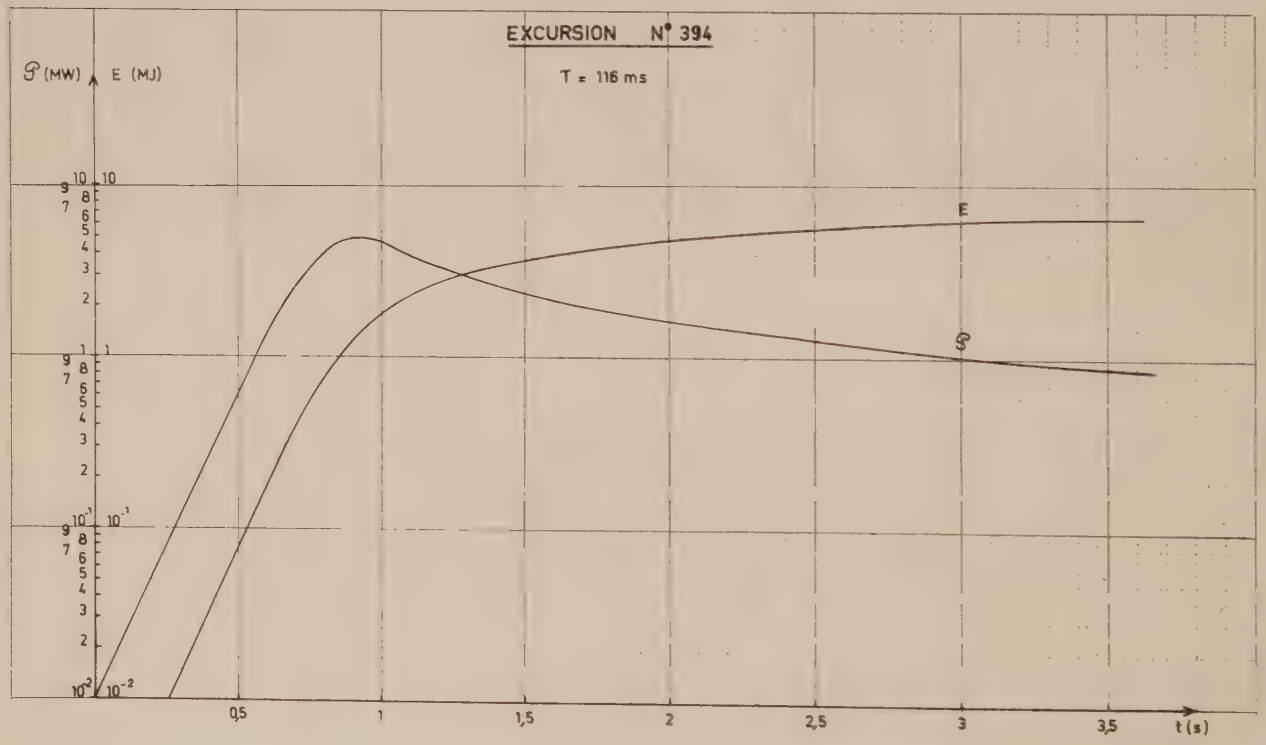

Figure 33 - Excursion de puissance de période 116 ms.

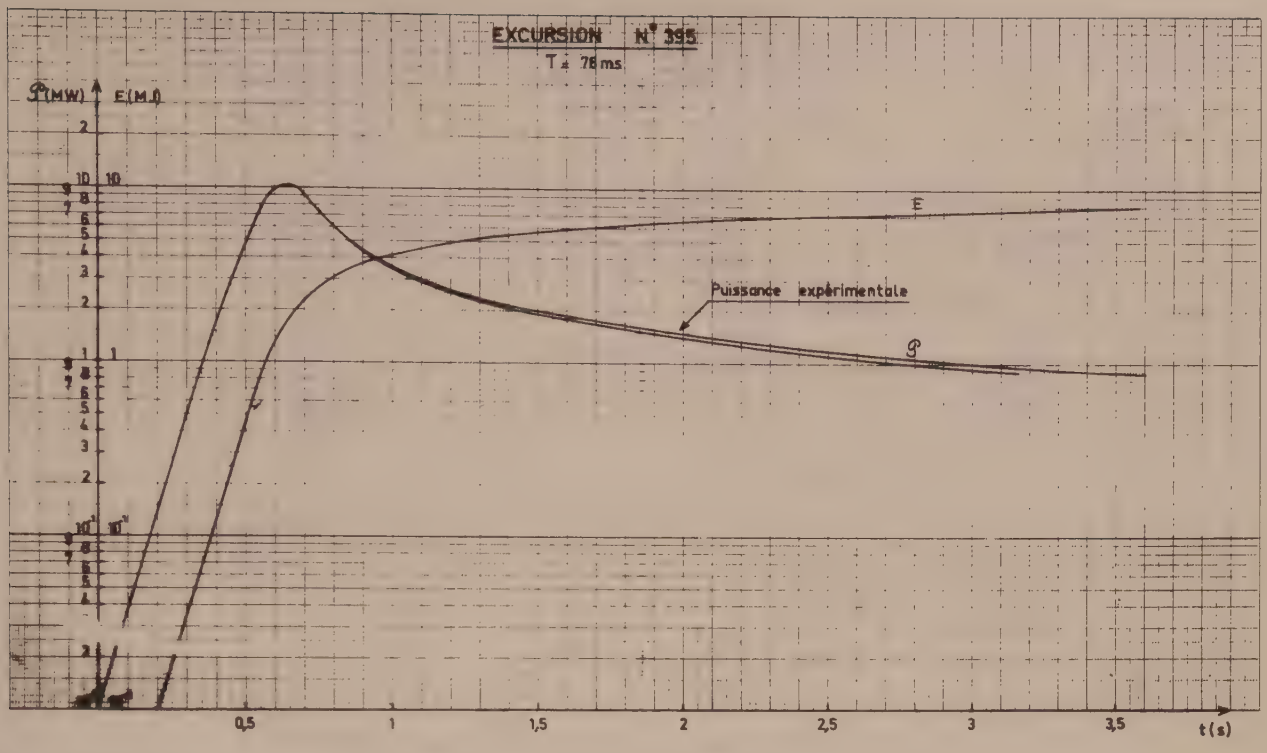

Figure 34 - Excursion de puissance de période 76 ms.

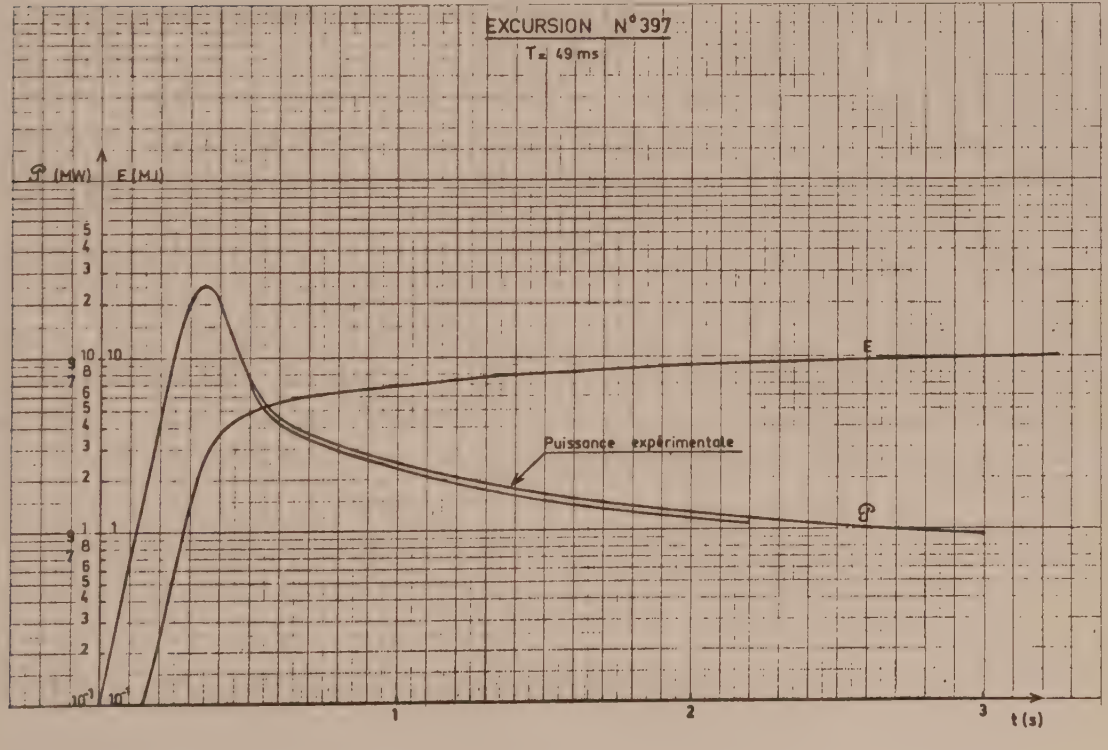

Figure 35 - Excursion de puissance de période 49 ms.

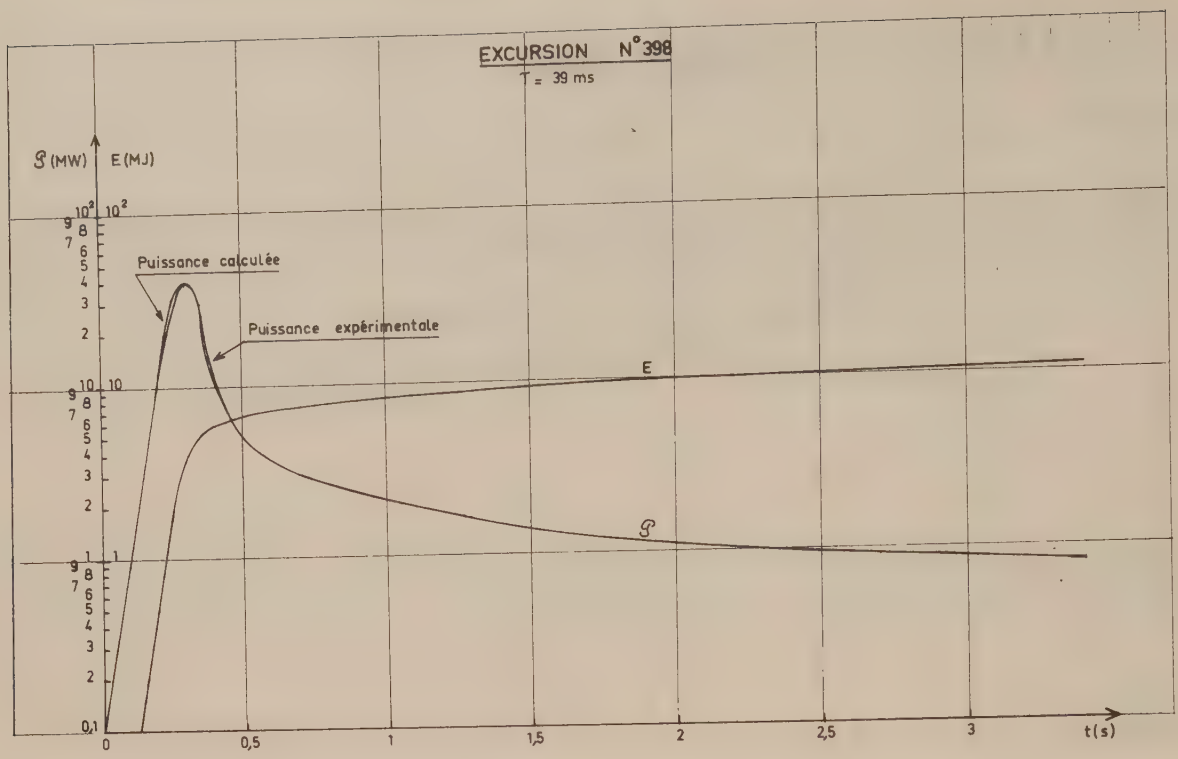

Figure 36 - Excursion de puissance de période 39 ms.

Sur l'ensemble des courbes de puissance où n'intervient pas l'ébullition, l'allure expérimentale est très proche de ce que donne le modèle théorique. La puissance croît d'abord exponentiellement, puis passe par un maximum pour décroître vers un palier. Les effets de températures : dilatation du combustible, de la gaine et échauffement du modérateur, suffisent à donner une bonne interprétation des phénomènes de contre-réaction.

Les périodes d'excursions de puissance où l'ébullition intervient sont les suivantes : 29 ms, 23,2 ms, 19,3 ms, 15,2 ms et 11,6 ms. Ce choix a été fait surtout selon la qualité d'enregistrement par traceur des courbes expérimentales. Il faut remarquer que dans l'ensemble ces courbes présentaient quelques points faux dus aux commutations de chambres de mesures. Elles ont été lissées au mieux pour obtenir des résultats expérimentaux raisonnables. Ces courbes sont représentées sur les figures 37, 38, 39, 40 et 41.

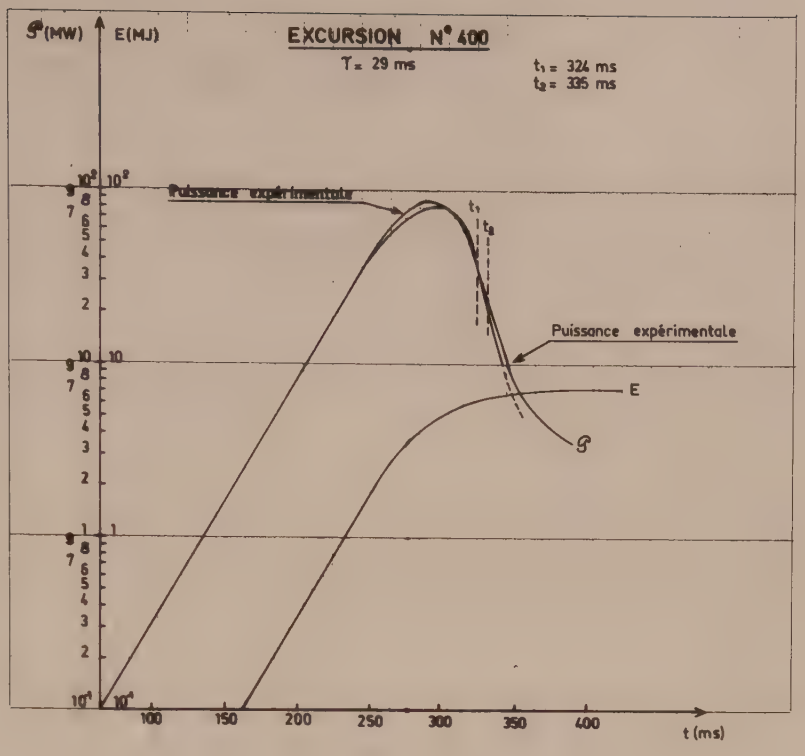

Figure 37 - Excursion de puissance de période 29 ms.

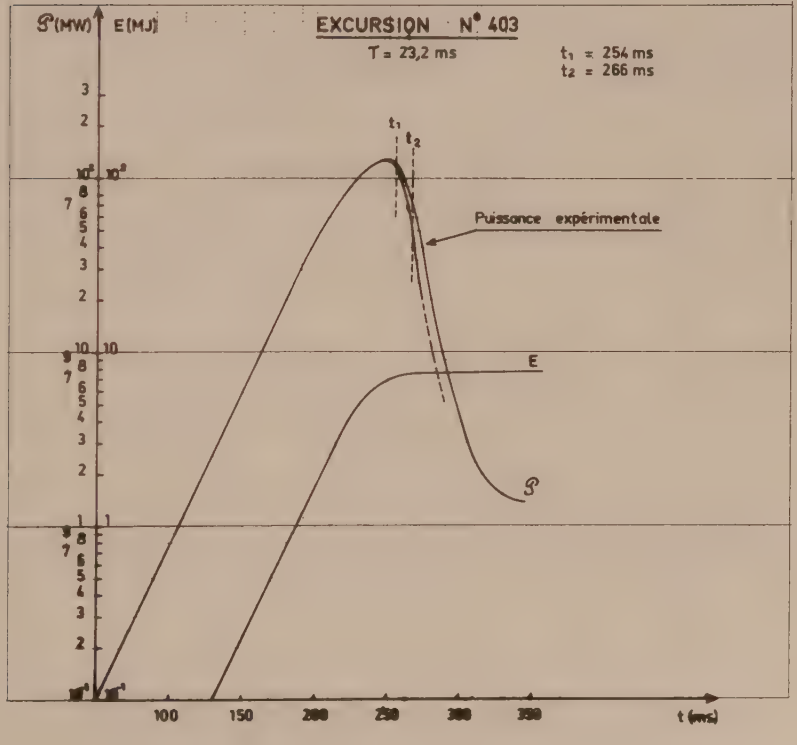

Figure 38 - Excursion de puissance de période 23,2 ms.

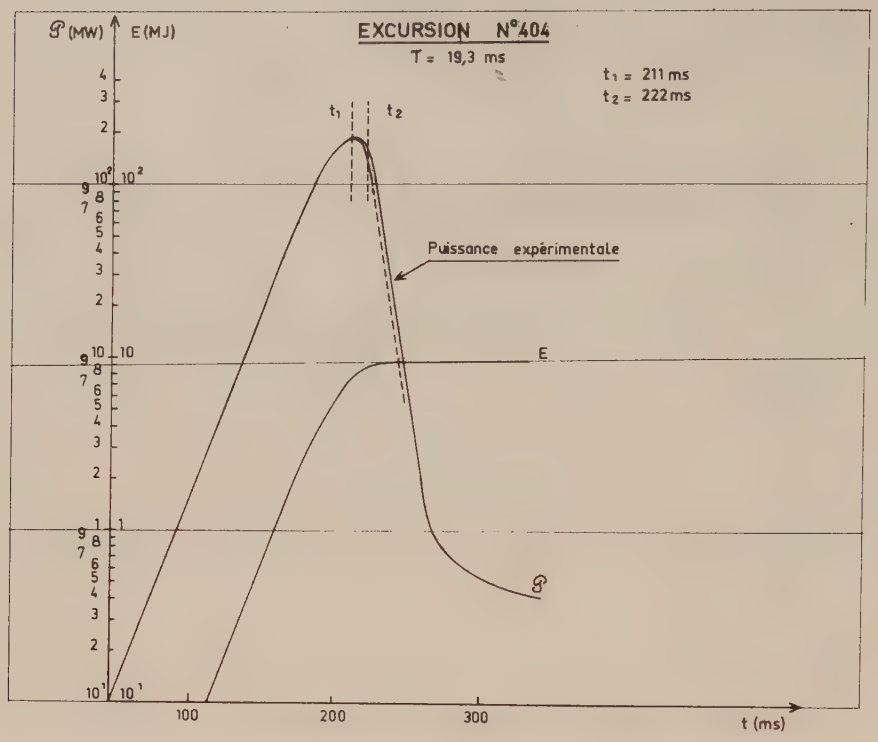

Figure 39 - Excursion de puissance de période 19,3 ms.

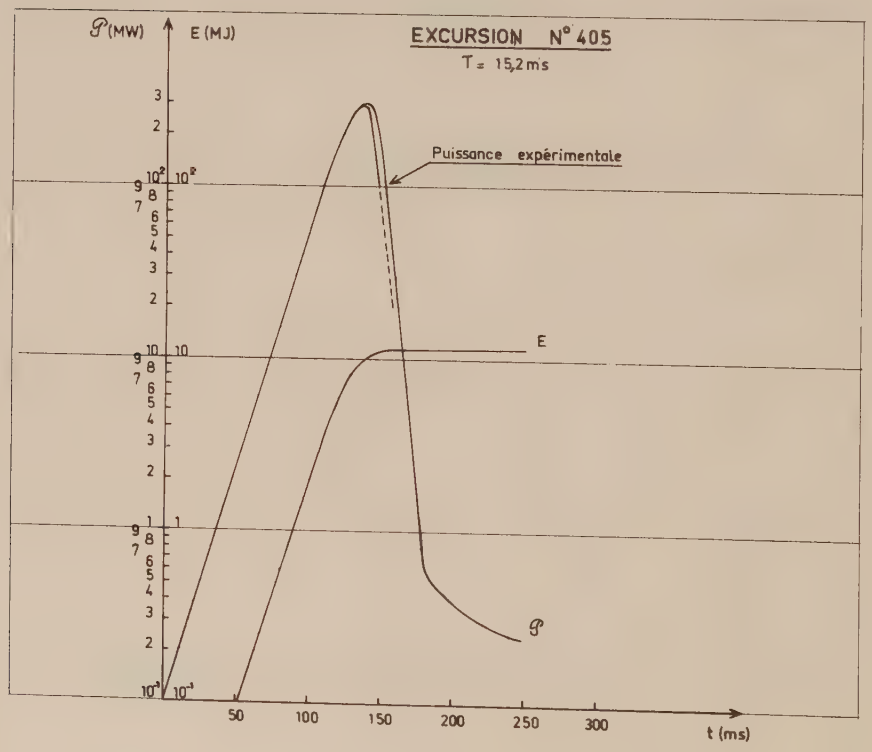

Figure 40 - Excursion de puissance de période 15,2 ms.

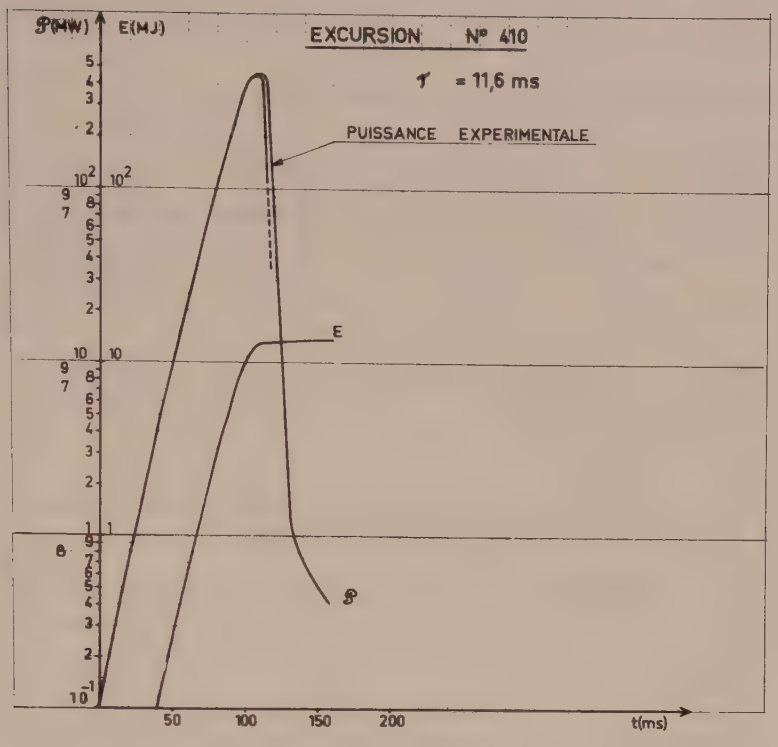

Figure 41 - Excursion de puissance de période 11,6 ms.

L'ensemble des courbes où intervient l'ébullition ont la même allure : croissance exponentielle, pic de puissance et décroissance. Il faut cependant remarquer que dans ce cas l'échelle de temps a changé. Les phénomènes sont plus rapides et la décroissance beaucoup plus accentuée. La contre-réaction due au volume de vide semble prendre une importance relative plus grande que la contre-réaction due aux effets de température.

Ces courbes de puissance, sans ébullition ou avec ébullition, étant présentées, il est nécessaire cependant de faire quelques remarques concernant l'interprétation théorique de ces expériences.

2.3. - Incertitudes sur les données expérimentales

Quelques données, qui sont introduites dans le programme de calcul, peuvent être entachées d'erreur. C'est ce point que nous voulons aborder maintenant. Ces données sont essentiellement : la période, les coefficients de vide et de température, et le coefficient γ qui pondère le volume de vapeur.

2.3.1. Incertitude sur la période d'une excursion de puissance

La période est un paramètre essentiel. Elle est mesurée par un réactimètre, d'une manière approximative. Nous avons décidé, pour la déterminer, de la calculer directement entre deux points de la courbe expérimentale de puissance, dans sa partie exponentielle

(qui existe toujours si le niveau de puissance de départ $\mathcal{P}_o$ est suffisament faible). Dans cette zone, la puissance est représentée par :

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}_o \, e^{\frac{t}{\tau}} \tag{77}$$

La puissance est elle-même proportionnelle à une tension en volts

$$\mathcal{P}_o \, e^{\frac{t}{\tau}} = h \, V \tag{78}$$

En supposant qu'il n'y a pas d'erreur sur l'enregistrement du temps (l'erreur absolue est de l'ordre d'une dizaine de microsecondes), si t_1 et t_2 désignent les instants où l'on mesure les tensions V_1 et V_2, il est facile d'établir la relation :

$$\frac{d\tau}{\tau} = - \frac{\tau}{t_2 - t_1} \left(\frac{dV_2}{V_2} - \frac{dV_1}{V_1} \right) \qquad (t_2 > t_1) \tag{79}$$

d'où $$\frac{\Delta\tau}{\tau} \leqslant \frac{2\,\tau}{t_2 - t_1} \frac{\Delta V}{V}$$

L'incertitude donnée sur la période est exprimée par :

$$\Delta\tau \leqslant \frac{8\,\tau^2}{100\,(t_2 - t_1)} \tag{80}$$

car $$\frac{\Delta V}{V} \leqslant \frac{4}{100} \tag{81}$$

Cette erreur commise sur la détermination de la période est faible, si l'on choisit la différence $t_2 - t_1$ suffisamment grande — ce qui est toujours possible si le niveau de puissance de départ est assez bas. Il ne s'agit là, d'ailleurs, que d'une précaution utile afin d'entrer une donnée valable dans le programme théorique.

2.3.2. Incertitudes sur le coefficient de vide moyen et le coefficient de température moyen

La manière dont sont calculés ces deux coefficients ne permet pas réellement de les bien connaître avec grande précision. Les incertitudes sur les valeurs des sections efficaces en fonction de l'énergie des neutrons en sont la cause essentielle. Nous ne pouvons espérer déterminer ces deux coefficients qu'à 15 % près.

Connaissant cependant, un ordre de grandeur du coefficient de vide et du coefficient de température, ces deux valeurs ont été ajustées sur un ensemble d'excursions de puissance sans ébullition. Trois expériences, dont on connaissait bien la période, ont servi à tester les valeurs adoptées pour le coefficient de vide et le coefficient de température, en constatant la bonne concordance du pic de puissance expérimental et du pic de puissance théorique. Deux valeurs ayant été adoptées, ces mêmes valeurs ont été confirmées à l'aide d'une dizaine d'excursions de puissance.

2.3.3. Incertitude sur le coefficient de pondération du volume de vapeur

Le manque de mesures sur le volume de vapeur dans le coeur, mesures d'ailleurs pratiquement irréalisables, ne nous a pas permis d'évaluer expérimentalement l'ordre de grandeur du volume de vapeur qui se développe au sein du réacteur lors d'une excursion

de puissance de faible période. Cependant, dans la plupart des excursions de puissance testées, le volume de vapeur ne se crée que peu avant le pic de puissance (quelques millisecondes) et n'affecte pratiquement pas la valeur de ce pic de puissance.

La pondération du volume de vide s'est donc faite d'une manière semi-expérimentale afin d'obtenir après le pic de puissance une pente convenable pour la décroissance de puissance. N'ayant pris en considération qu'un canal moyen, pour le développement du volume de vapeur, nous avons pondéré ce volume de vapeur par un coefficient $\gamma = \frac{1}{5}$. Ce coefficient représente cependant une approximation raisonnable car il correspond, à peu près, à une ébullition créée dans la partie centrale du coeur (20 % au lieu de 23 %). Les résultats obtenus sont néanmoins assez satisfaisants, si l'on compare les courbes théoriques et expérimentales de puissance sur les figures 37, 38, 39, 40 et 41.

Il eût fallu certainement, pour affiner le modèle théorique, distinguer entre plusieurs types de canaux — suivant les répartitions des flux neutroniques. Cela nécessite un calcul de températures plus fin et éventuellement de volume de vide plus précis, suivant le découpage du coeur en plusieurs régions. Il est alors à envisager des temps de calcul beaucoup plus longs. Nous nous sommes un peu restreint, pour cette raison, à une description globale de l'anti-réactivité due au volume de vapeur. Les résultats obtenus pour les évolutions des puissances nous ont semblé assez satisfaisants, pour éviter une pénalisation trop lourde en temps "ordinateur".

2.4. - Courbes du pic de puissance et de l'énergie dégagée au pic en fonction de l'inverse de la période

Ces deux courbes sont données simplement à titre d'information. Elles ne concernent que le coeur CABRI étudié, mais montrent cependant, d'une façon caractéristique, le changement dans l'évolution des phénomènes physiques.

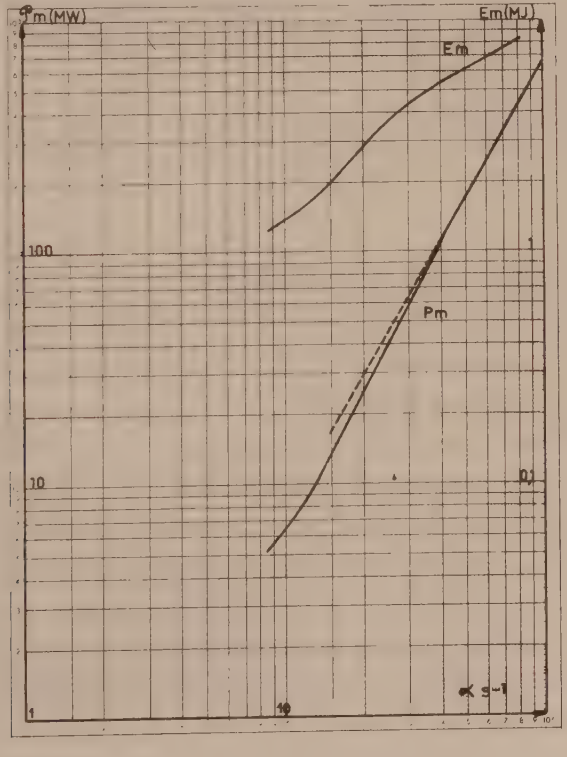

Figure 42 - $\mathcal{P}_m(\alpha)$ et $E_m(\alpha)$

Sur la courbe représentant le pic de puissance en fonction de l'inverse de la période, il apparaît dès que la période est suffisamment courte (approximativement 30 ms) un changement de pente qui met en évidence l'apparition des phénomènes d'ébullition ajoutant un terme supplémentaire à la contre-réaction.

De même sur la courbe d'énergie au pic, en fonction de l'inverse de la période, il est visible que dès que la période de l'excursion de puissance est inférieure à 30 ms cette courbe change aussi de pente.

L'ensemble de ces deux courbes met bien en évidence l'existence de phénomènes physiques nouveaux : la vaporisation du modérateur.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous les valeurs qui ont permis de construire ces deux courbes.

τ (s)	$\mathcal{P}_m$ expérience (MW)	$\mathcal{P}_m$ calculé (MW)	E_m (MJ)	α (s^{-1})	$\mathcal{P}_o$ (MW)
0.116	5	4,96	1,24	8,6	10^{-2}
0.076	10,4	10,6	1,74	13,2	10^{-2}
0.049	26,1	26,5	2,9	20,4	10^{-2}
0.039	40	42	3,8	25,6	10^{-2}
0.029	86	82,4	4,7	34,5	10^{-2}
0.0232	126	126,4	5,6	43,1	10^{-2}
0.0193	177	184,9	6,2	51,8	10^{-2}
0.0152	300	293	7,1	65,9	10^{-1}
0.0116	500	480,9	8,5	86,2	10^{-1}

III. - RESULTATS THEORIQUES OBTENUS A PARTIR DU MODELE D'EBULLITION EN FILM

3.1. - Généralités

Les résultats théoriques obtenus donnent une approche réaliste de l'ensemble des phénomènes physiques qui se produisent dans le canal. L'analyse détaillée de ces résultats est difficile à faire car les évolutions des pressions, vitesses et volumes de vapeur interfèrent entre elles et ne peuvent être systématiquement dépouillées séparément. Il est cependant possible de se rendre compte succinctement de ce qui se passe au cours d'une excursion de puissance. Nous avons choisi pour une interprétation simplifiée des phénomènes, un ensemble de trois excursions de puissance de périodes : 29 ms, 23,2 ms et 19,3 ms. Ces expériences montreront de quelle façon l'ébullition intervient sur l'évolution des pressions et des vitesses. Il faut noter, néanmoins, que parfois le calcul a peut-être été fait avec un pas de temps un peu grand. Un affinement de ce pas aurait sans doute permis de mieux explorer localement un phénomène, mais il est difficile de fixer le meilleur pas en temps pour l'ensemble des pressions, vitesses et volumes de vapeur, car il faut alors pouvoir visualiser toutes ces grandeurs au même moment pour évaluer le comportement. Nous présenterons les résultats obtenus dans l'ordre des pé-

riodes décroissantes et interpréterons au mieux l'évolution des grandeurs calculées.

3.2. - Excursion de puissance de période 29 ms

Rappelons tout d'abord, pour au moins cette première excursion de puissance, la géométrie adoptée dans le calcul théorique. Cela permettra de bien fixer les grandeurs qui interviendront.

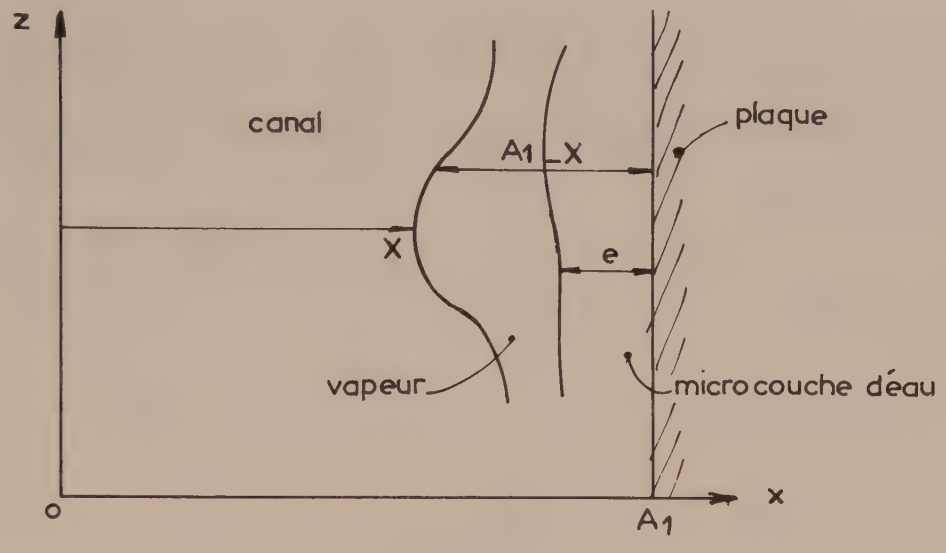

Figure 43

Le schéma ci-dessous redéfinit épaisseur de vapeur et microcouche d'eau.

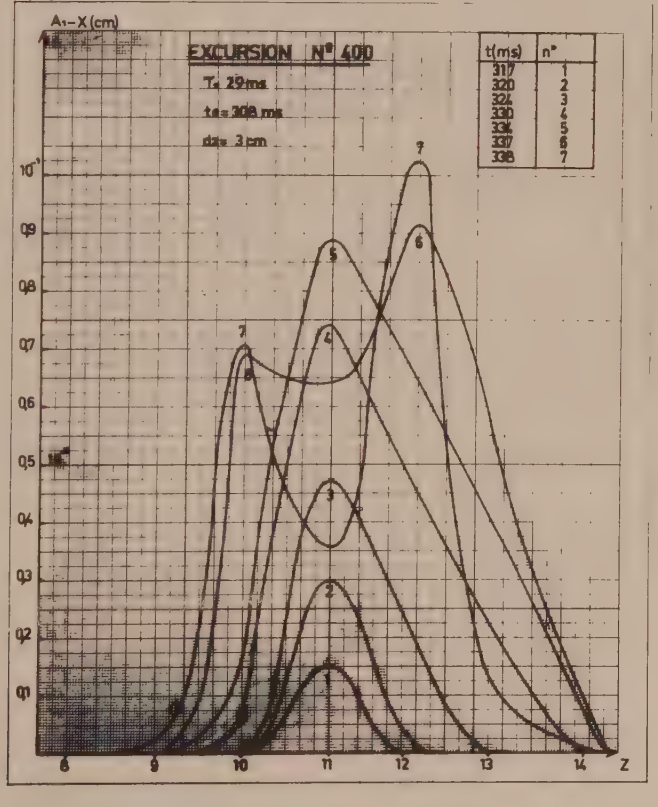

Figure 44 - Evolution du film de vapeur au cours du temps.

Nous présenterons tout d'abord les variations de $A_1 - X(z)$ en fonction du temps. Cette grandeur donne l'évolution du film de vapeur tout le long d'une plaque de combustible.

L'ébullition commençante se manifeste pour la première fois, lors de l'excursion de puissance au centre du canal (j=11) à 308 ms. La figure 44 montre que le développement du film de vapeur se fait d'abord à cette cote, puis de part et d'autre de cette cote.

Pour t = 332,5 ms (fig. 45) la microcouche d'eau a disparu puisque $e_{11} = 0$. Il n'y a plus à cette cote j=11, d'échange de chaleur entre la vapeur et la plaque. La température de la vapeur reste constante. De plus, la pression pour j=11 commençant à se creuser (fig. 48 - comparaison de 4 et 5), il y a expansion de la vapeur à cette cote (fig. 47 : 332,5 < t<334).

Par la suite, le film de vapeur n'étant plus alimenté, ce film se recondense (fig. 47 : t > 334 ms).

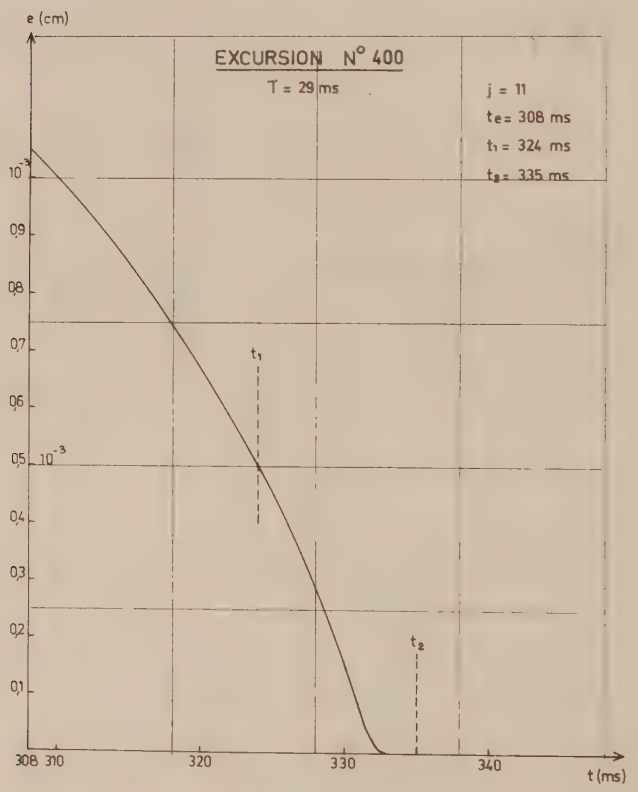

Figure 45 - Evolution de la mi crocouche d'eau au centre du canal.

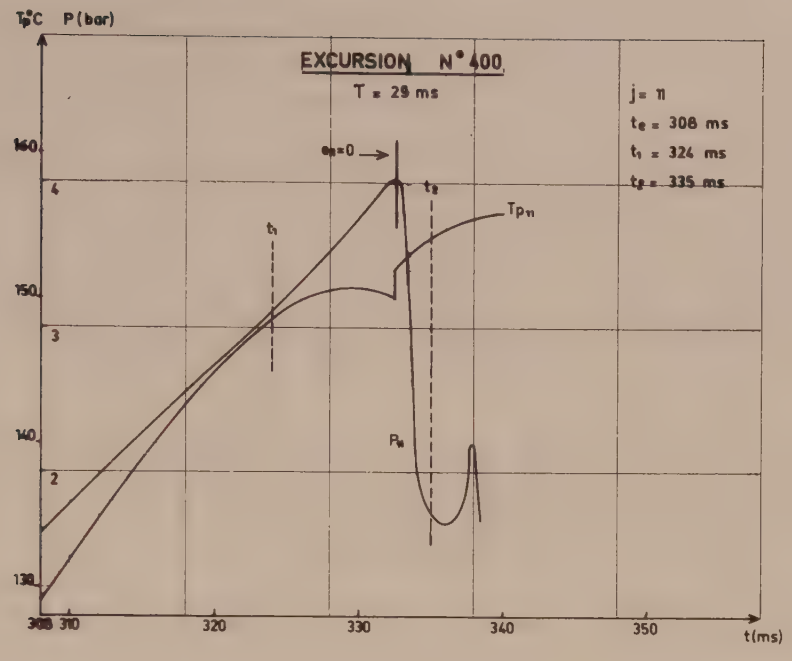

Figure 46 - Evolution de la pression et de la température de plaque au centre du canal.

Notons de plus sur la figure 46 la discontinuité de la température de plaque lorsque e_{11} devient nul, ce qui correspond bien à l'isolement thermique par la vapeur.

En reprenant l'évolution de A_1 - X(z) en fonction du temps (fig. 44), il faut constater que le film se déforme en se creusant au centre (j=11). Ceci est dû à la recondensation de la vapeur à cette même cote à partir de t = 334 ms (fig. 47) car la microcouche d'eau contre la plaque a disparu. Pour les instants suivants, le minimum de l'épaisseur de vapeur est atteint pour t = 338 ms à j=11, comme on le voit sur les figures 44 et 47. L'ébullition se développe nettement aux alentours de cette cote, et semble devoir commencer à envahir le canal; il n'y a pas dans le cas de cette période de 29 ms de retour brusque de l'eau du canal vers la plaque.

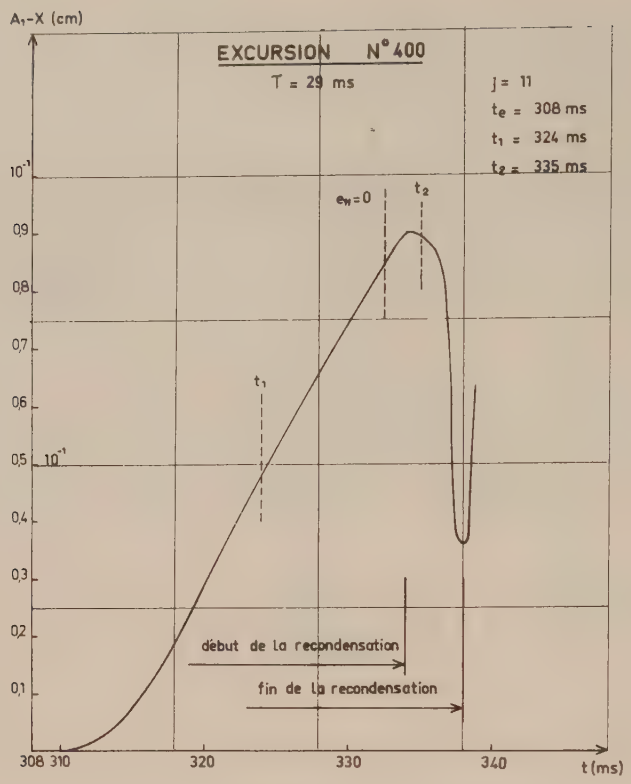

Figure 47 - Evolution du film de vapeur au centre du canal.

Une grandeur qu'il faut lier à l'évolution du film de vapeur est principalement la pression. Nous donnons figure 48 la variation de la pression le long du canal en fonction du temps.

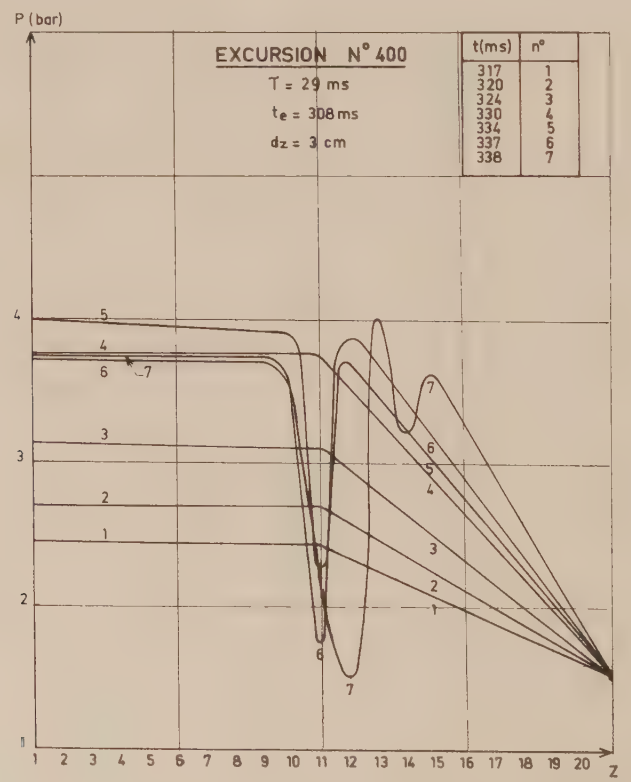

Figure 48 - Evolution de la pression le long du canal, au cours du temps.

Jusqu'à l'apparition de l'ébullition (t=308 ms) la pression décroît linéairement en z sous l'effet de la pesanteur. Dès le développement d'une bulle de vapeur, la pression augmente dans les cotes les plus basses, en restant linéairement décroissante en z. Ceci provient de l'hypothèse faite : canal fermé pour z=0 (W=0). Dans les parties hautes du canal, la pression reste linéairement décroissante en z. Cette forme de courbe subsiste tant que l'ébullition est relativement faible au centre du canal. Puis, pour t = 332,5 ms, e_{11} devient nul. Il y a ralentissement de la production de vapeur et affaiblissement de la pression au centre du canal. Lorsque, par la suite (t=334 ms) la recondensation à j=11 intervient, le volume de vapeur s'effondre et provoque un affaissement des pressions au milieu du canal. A l'instant t=338 ms, e_{11} et e_{12} sont nuls ce qui correspond à un minimum accentué de la pression sur la courbe 7 (fig. 48); de plus, e_{14} devient nul, ce qui se traduit sur cette même courbe 7 par un minimum relatif de la pression pour j=14.

Pour compléter l'information, nous donnons sur la figure 49 l'évolution au cours du temps, de la pression en bas du canal (P_1) et de la vitesse en haut du canal (W_{21}).

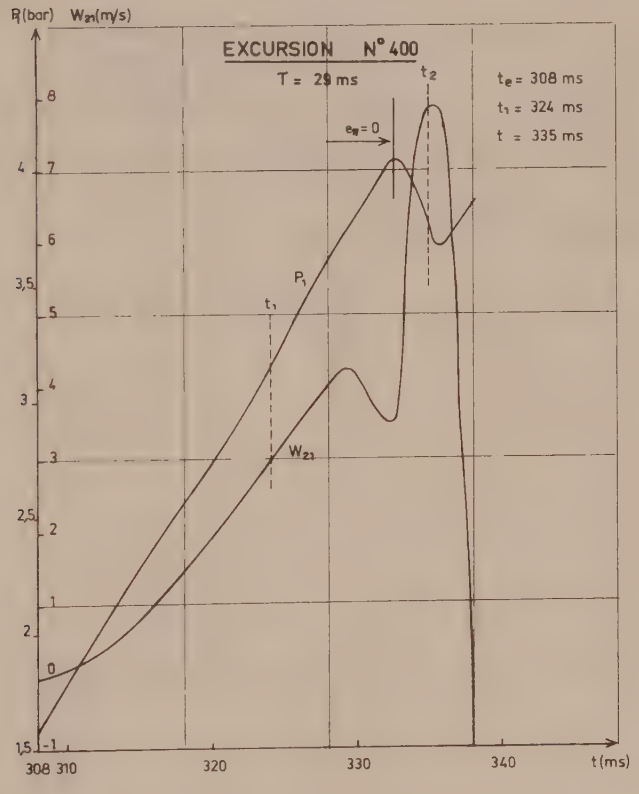

Figure 49 - Evolution de la pression en bas du canal et de la vitesse en haut du canal.

Le premier pic de P_1 correspond à $e_{11}=0$ pour t=332,5 ms. Dans les instants suivants, le ralentissement de la production de vapeur, puis la recondensation font chuter la pression en bas du canal. L'augmentation du film de vapeur dans les parties plus hautes du canal augmente la vitesse d'expulsion (W_{21}) vers le haut, puis W_{21} décroît lorsqu'il y a recondensation au centre du canal.

Il existe pour W_{21} un minimum à l'instant t=322,5 ms. Ce minimum est lié, semble-t-il, à une recondensation à j=10 produit par le pic de pression P_{11}.

Nous donnerons pour terminer, à titre indicatif, pour deux instants t_1 = 324 ms et t_2 = 335 ms, les évolutions en fonction de z, de la pression P et de la vitesse W d'une part (fig. 50), de la pression P et de A_1-X d'autre part (fig. 51).

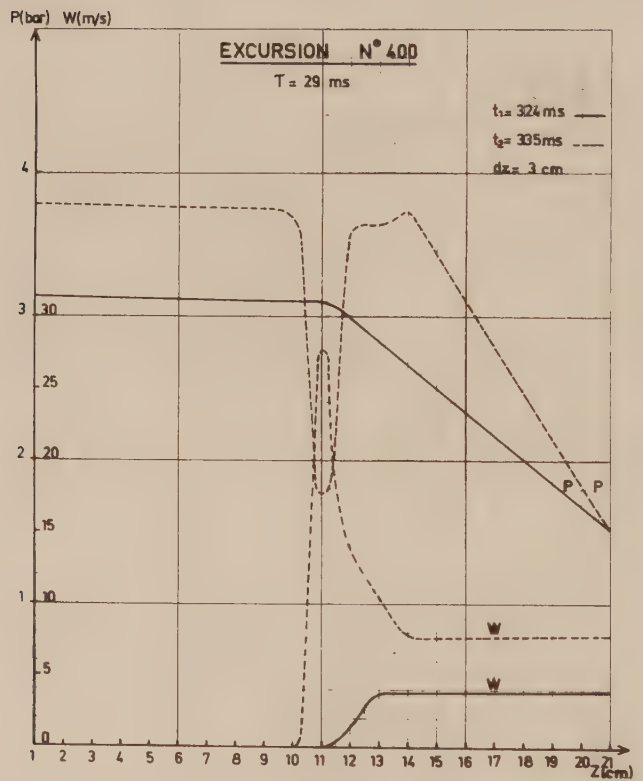

Figure 50 - P(z), W(z)

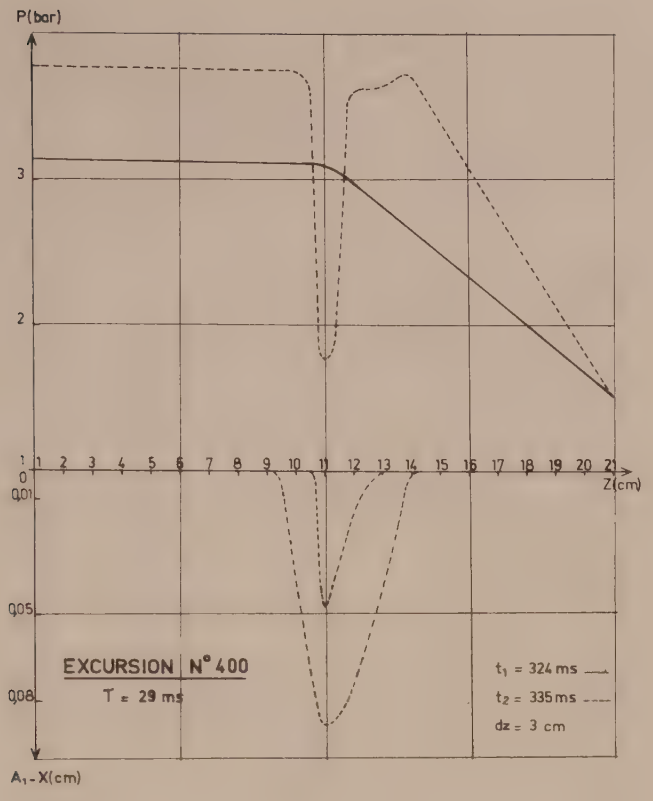

Figure 51 - P(z), A_1-X(z)

3.3. - Excursion de puissance de période 23,2 ms

Pour présenter les résultats théoriques relatifs à cette expérience, nous prendrons le même schéma que précédemment. Les variations de A_1-X(z) en fonction du temps seront d'abord commentées. La figure 52 représente ces variations.

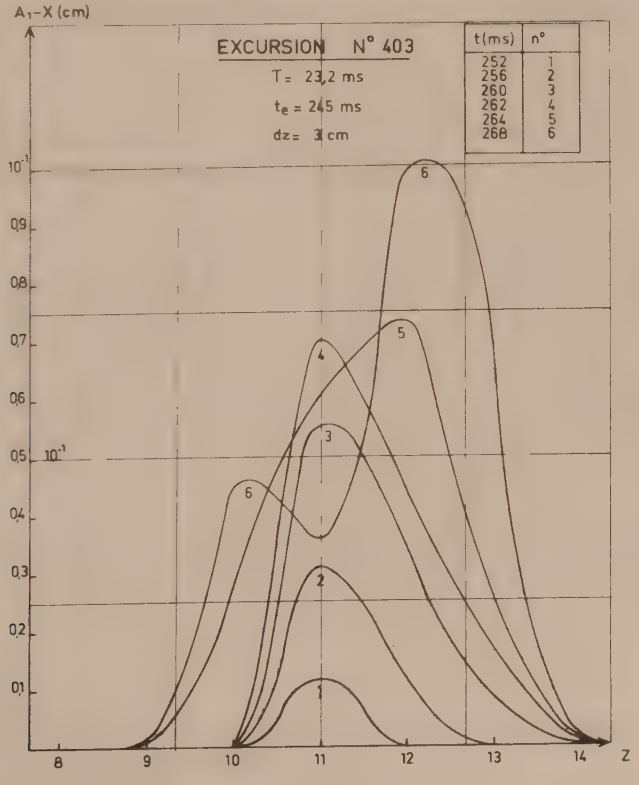

Figure 52 - Evolution du film de vapeur au cours du temps.

L'ébullition commençante débute à la cote j=11 qui caractérise le milieu du canal, à t=245 ms. Le film de vapeur se développe au centre du canal jusqu'à l'instant t=262 ms où e_{11} devient nul comme le montre la figure 53

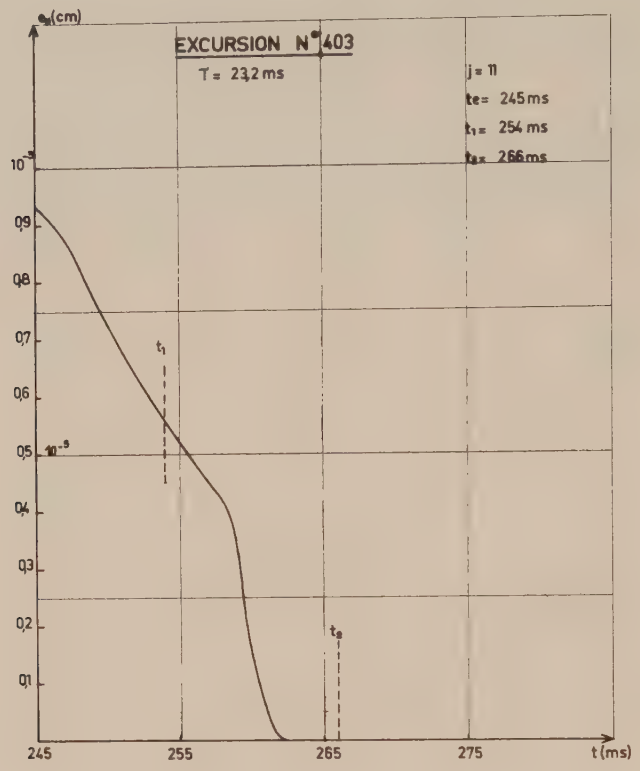

Figure 53 - Evolution de la microcouche d'eau au centre du canal.

Pour t > 262 ms, le film de vapeur régresse au centre du canal tandis que de part et d'autre de la cote j=11, l'épaisseur de vapeur se développe (fig. 52).

Sur la figure 54, il apparaît que dès que e_{11}=0, le volume de vapeur continue à croître légèrement car P_{11} commence à diminuer (fig. 55), mais très rapidement la condensation de la vapeur commence au milieu du canal (t=263 ms). Il faut remarquer sur la figure 55 la discontinuité de la température de plaque lorsque e_{11}=0. Les échanges thermiques entre vapeur et plaque changent de nature. Il y a isolement de la plaque par la vapeur.

La recondensation amène l'effondrement du film de vapeur au centre du canal, ce que l'on constate sur la courbe 6 de la figure 52.

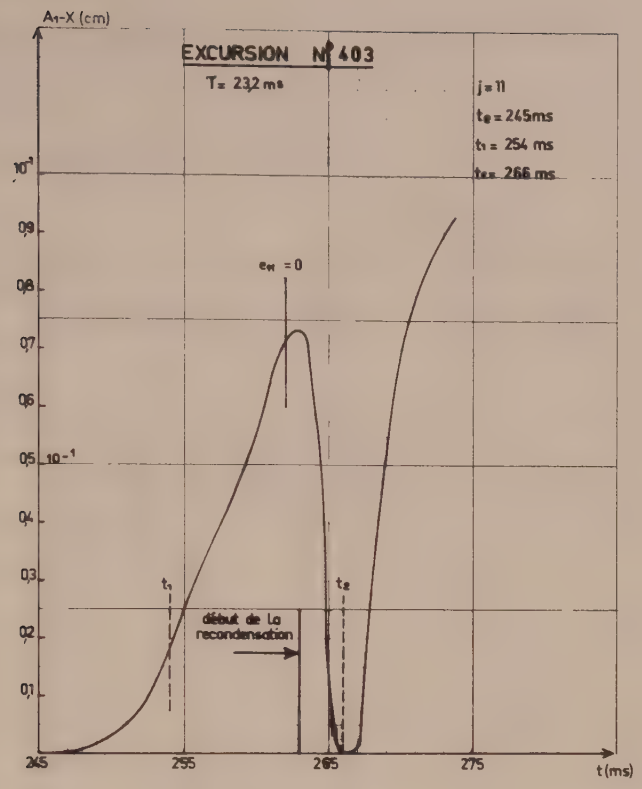

Figure 54 - Evolution du film de vapeur au centre du canal.

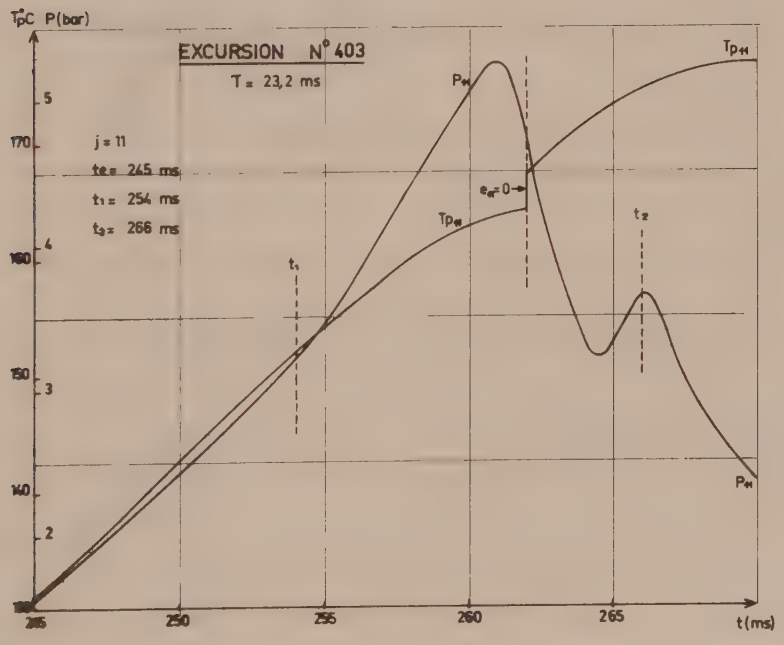

Figure 55 - Evolution de la pression et de la température de plaque au centre du canal.

Pour t=266 ms, il apparaît un phénomène nouveau; $X_{11} = A_1$. La vapeur est complètement condensée et l'eau du canal revient au contact de la plaque (fig. 54). Par la suite, le phénomène d'ébullition se reproduit au centre du canal (t > 267 ms). Il faut noter cependant qu'entre le début de l'ébullition à la cote 11 (t=245 ms) et le contact, après condensation, de l'eau du canal avec la plaque à cette même cote (t=266 ms), il s'est écoulé 21 ms.

L'évolution du film de vapeur,le long du canal, est liée à celle de la pression au cours du temps. Cette évolution de la pression est donnée figure 56.

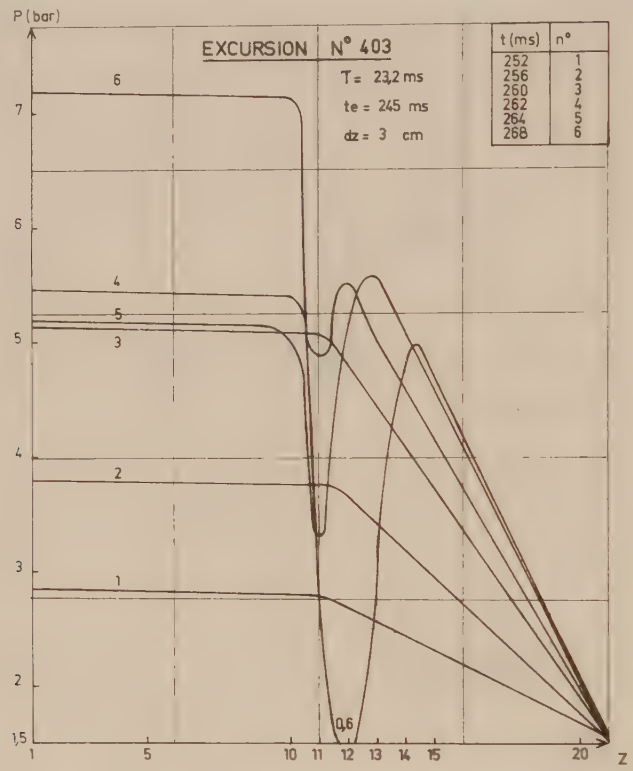

Figure 56 - Evolution de la pression le long du canal au cours du temps.

Dès que l'ébullition apparaît au centre du canal, la pression en bas du canal augmente (t > 245 ms). Elle est linéaire en z car la gravité intervient, en même temps que l'hypothèse du canal fermé pour z=0. Au-dessus de la cote 11 où se développe le film de vapeur, la pression reste linéairement décroissante en z ($\frac{\partial P}{\partial z}$ = cste W = cste).

A l'instant t=262 ms, e_{11}=0. La pression s'effondre au centre du canal. La pression P_{11} diminue, favorisant une faible formation de vapeur à la cote j=11, mais la recondensation,apparaissant à t=263 ms à cette cote, entraîne une chute de pression vers les cotes 12 et 13.

Il est probable qu'à partir de t=268 ms, la pression au centre du canal est si faible (0,6 bar) que notre modèle ne soit plus tellement valable. La loi liant la température de saturation à la pression, et donc le critère d'ébullition, doivent peut-être

faire l'objet d'un meilleur examen. Nous présenterons, comme précédemment, l'évolution de la pression en bas du canal, comparée à celle de la vitesse en haut du canal. Ces évolutions sont données figure 57.

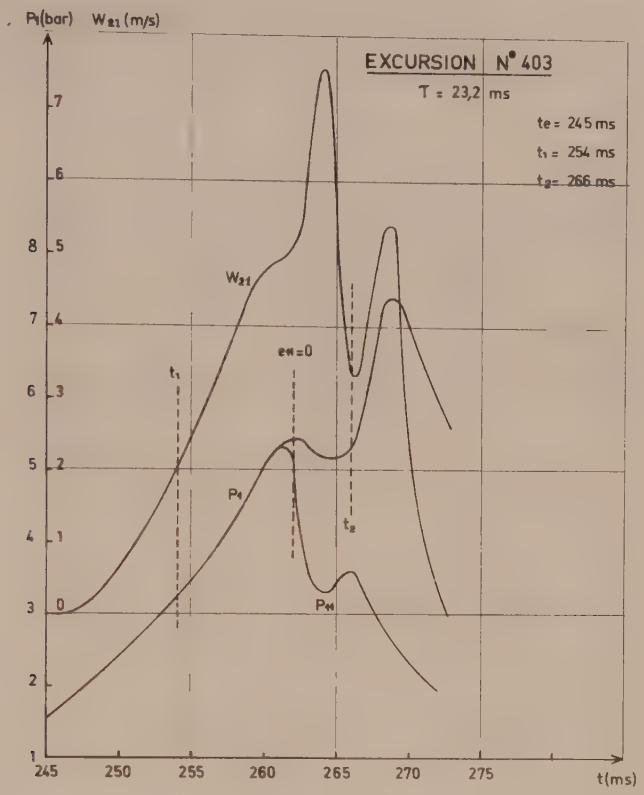

Figure 57 - Evolution de la pression en bas du canal et de la vitesse en haut du canal.

Lorsque e_{11} devient nul (t=262 ms), P_1 passe par un maximum. Le changement de la nature du transfert thermique à la cote j=11 provoque une chute de pression à cette même cote. La recondensation intervenant fait passer P_{11} par un minimum. Ce phénomène n'influe pas sur ce qui se passe dans les cotes supérieures du canal, où des pressions plus fortes favorisent l'éjection de l'eau vers le haut et font passer par un maximum W_{21} (t=264 ms). Remarquons que lorsque $X_{11} = A_1$ (t=266 ms), la pression P_{11} au milieu du canal passe par un maximum relatif.

Nous donnons pour compléter, à deux instants différents t_1=254 ms et t_2=266 ms, les évolutions en fonction de z, de la pression P et de la vitesse W d'une part (fig. 58), de cette même pression P et de A_1 - X(z) d'autre part (fig. 59).

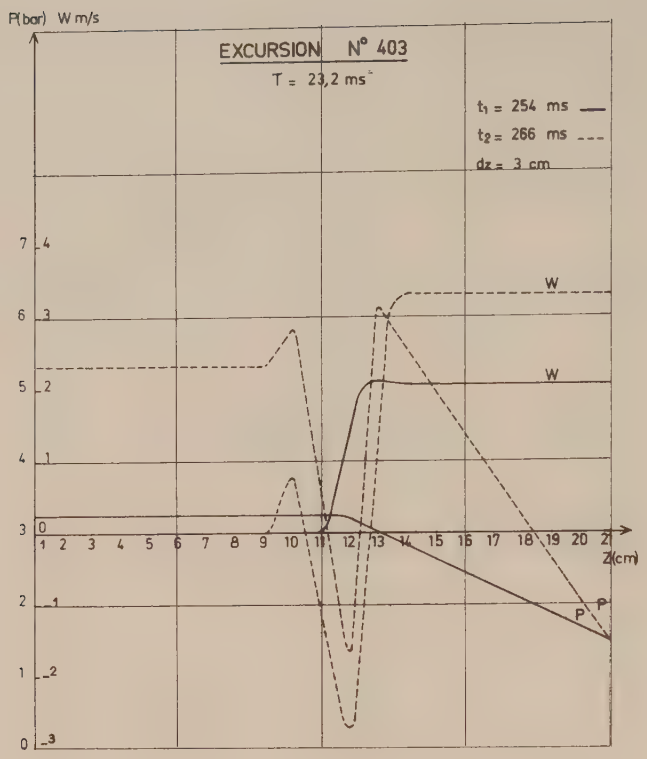

Figure 58 - P(z), W(z)

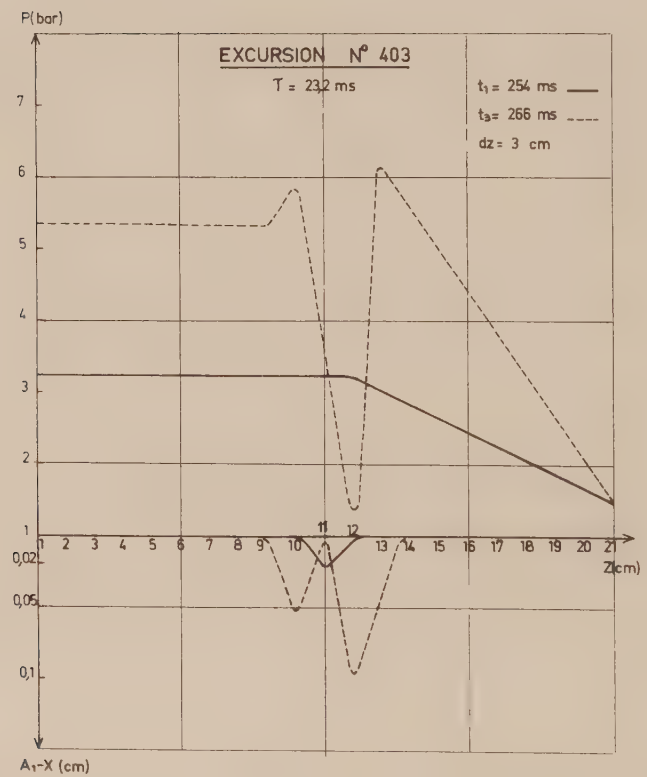

Figure 59 - P(z), A_1-X(z)

3.4. - Excursion de puissance de période 19,3 ms

Nous porterons notre attention, tout d'abord, sur l'évolution du film de vapeur le long de la plaque en fonction du temps. La période de l'excursion de puissance étant plus courte, les phénomènes sont plus rapides. L'évolution de la bulle de vapeur est plus perturbée. L'ébullition commençante apparaît au centre du canal à t=204,5 ms. La figure 60 montre un développement rapide de cette ébullition au centre du canal.

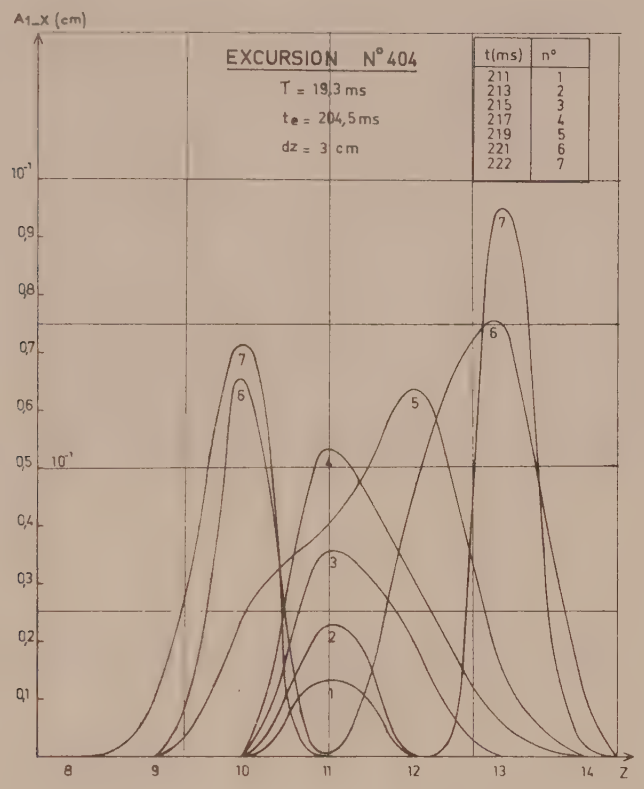

Figure 60 - Evolution du film de vapeur au cours du temps.

Cette ébullition se poursuit légèrement au-delà de $e_{11}=0$ (t=217 ms) (fig. 61). Les conditions de transfert d'énergie le permettent, comme le montre la figure 62.

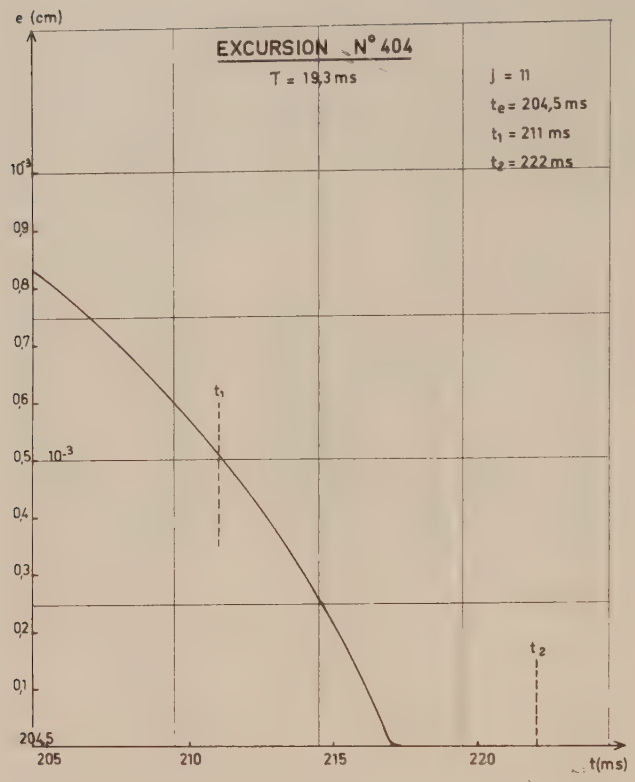

Figure 61 - Evolution de la microcouche d'eau au centre du canal.

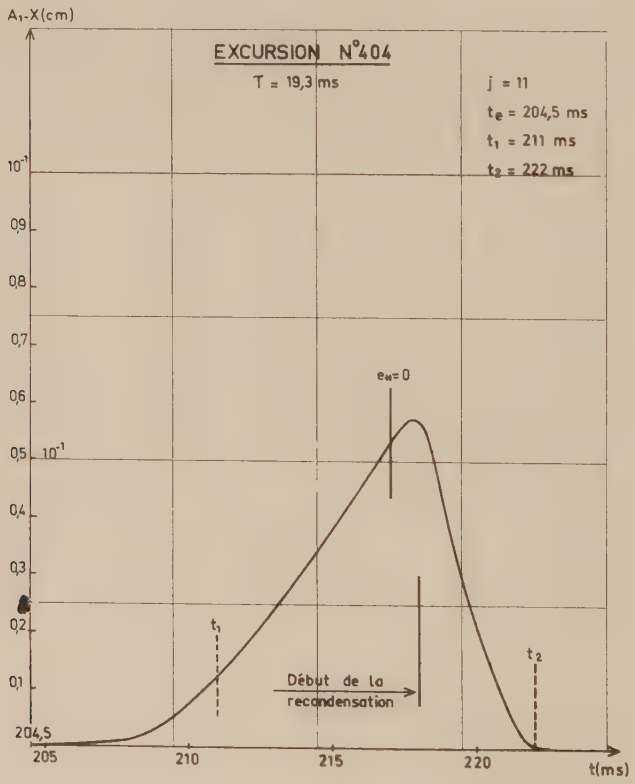

Figure 62 - Evolution du film de vapeur au centre du canal.

Remarquons sur la figure 63 la discontinuité de température de plaque dès que $e_{11}=0$. C'est un phénomène déjà rencontré précédemment.

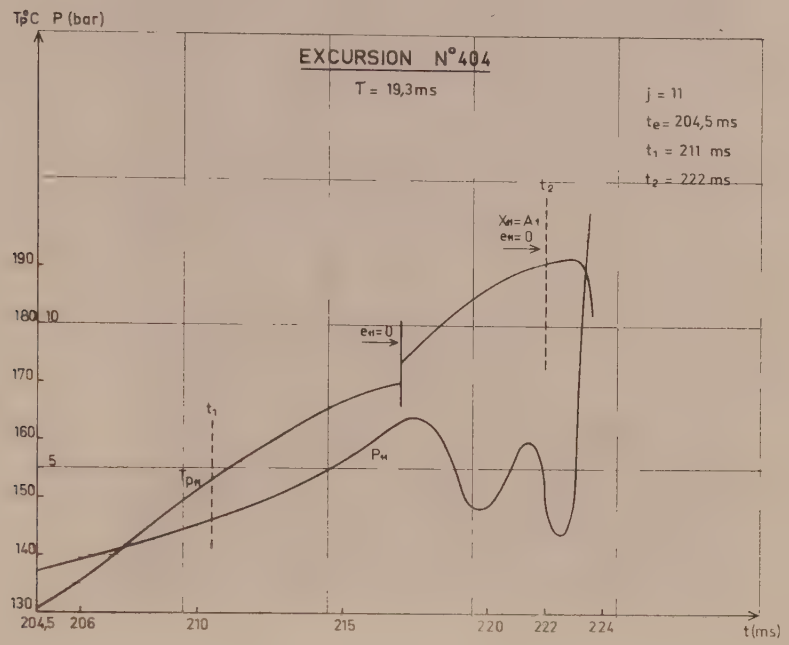

Figure 63 - Evolution de la pression et de la température de plaque au centre du canal.

La recondensation du film de vapeur au centre du canal pour t=219 ms (fig. 61) amorce l'effondrement de la bulle à la cote 11. Dès les instants suivants (t > 219 ms), l'eau du canal entre en contact avec la plaque à la cote 12, comme le montre la courbe 7 de la figure 60. Le film de vapeur se rétracte au centre du canal tandis que l'ébullition se développe nettement de part et d'autre des cotes 11 et 12.

Notons que pour la cote 11, la recondensation du film de vapeur est complète pour t=222 ms ($X_1=A_1$) (fig. 62). Ceci donne une durée de vie de bulle de l'ordre de 18 ms.

L'évolution de la pression le long du canal en fonction du temps a la même allure que dans les excursions précédentes (fig. 64). Tant que l'ébullition reste relativement faible, la pression est linéaire en z (influence de la gravité) dans les parties basses du canal (hypothèse du canal fermé).

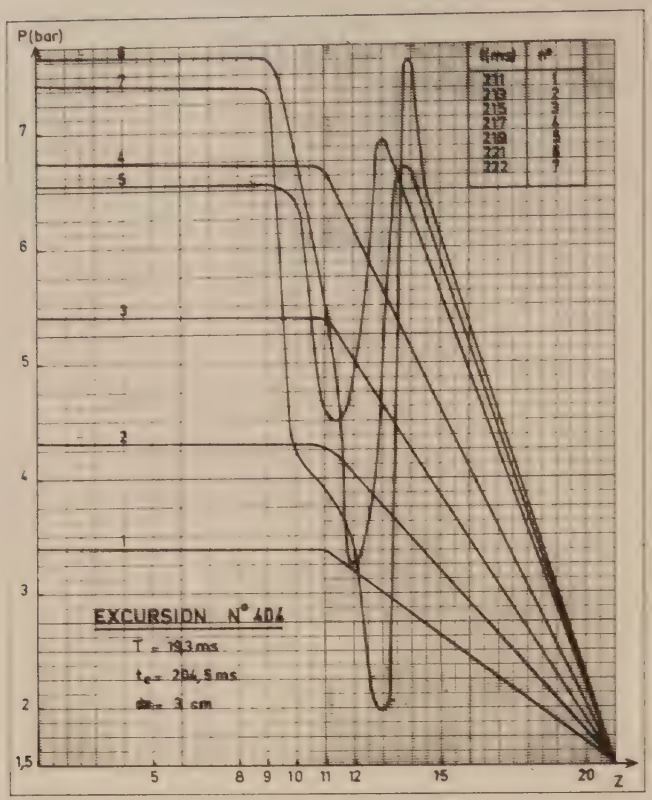

Figure 64 - Evolution de la pression le long du canal au cours du temps.

Dans les parties plus hautes du canal, au-dessus de la cote 11 où se développe l'ébullition, la pression est linéairement décroissante en fonction de z, avec une pente d'autant plus accentuée que la pression en bas du canal est plus grande. Cette allure de la pression subsiste jusqu'au moment où $e_{11}=0$ (t=217 ms). A partir de cet instant, la recondensation de la vapeur, intervenant au centre du canal, favorise l'effondrement de la pression aux cotes 11 et 12, comme le montre la figure 64.

La figure 65 donne les variations de la pression en bas du canal, comparées à celles de la vitesse en haut du canal.

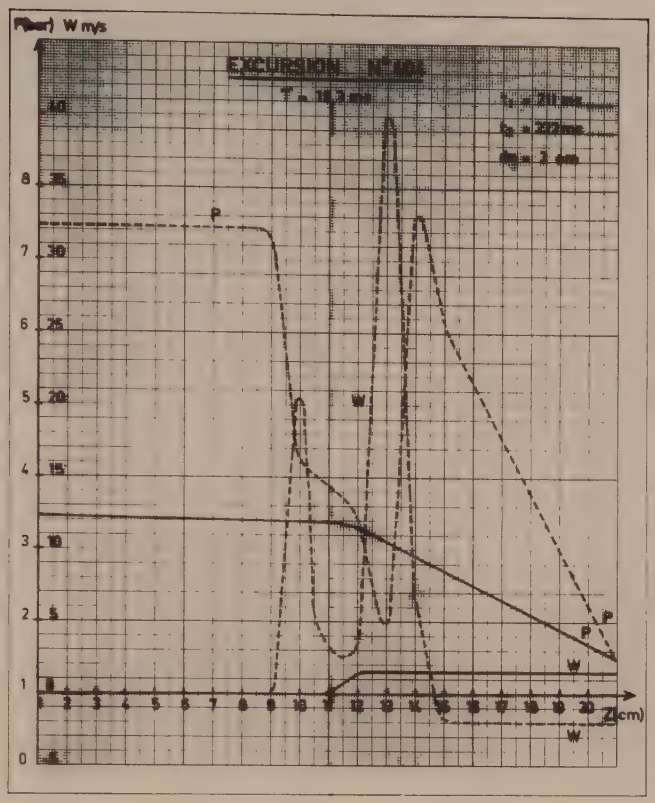

Figure 65 - Evolution de la pression en bas du canal
et de la vitesse en haut du canal.

Le premier pic de pression pour P_1 intervient pour $e_{11}=0$ à t=217 ms. Les phénomènes expliquant l'évolution de la vitesse W_{21} sont complexes — mais il faut noter cependant que pour t=222 ms, l'effondrement du film de vapeur au centre du canal crée un appel d'eau suffisant pour inverser le débit dans la partie supérieure du canal.

Nous donnons à titre d'information, comme précédemment, à deux instants différents t_1=211 ms et t_2=222 ms, les évolutions en fonction de z, de la pression P et de la vitesse W, d'une part (fig. 66), de la pression P et de A_1-X(z) d'autre part (fig. 67).

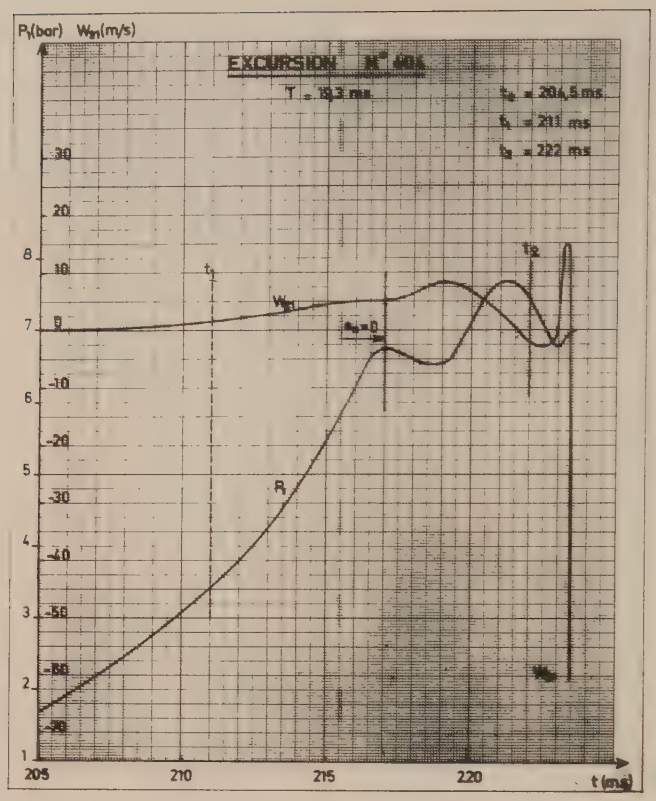

Figure 66 - P(z), W(z)

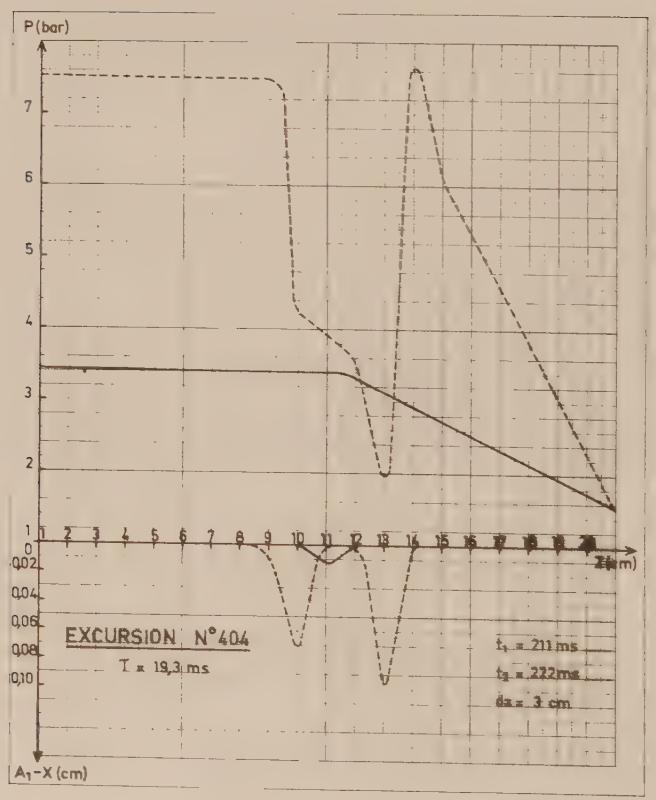

Figure 67 - P(z), A_1-X(z)

3.5. - Evolution du volume de vapeur en fonction du temps

Pour chacune des excursions de puissance de période 29 ms, 23,2 ms et 19,3 ms, nous avons tracé en fonction du temps la variation du volume de vapeur. Plus précisément, il s'agit de la quantité $V(t) = \int_0^\ell y\, dz$. Cette grandeur traduit la pulsation globale intervenant dans le canal au cours de l'excursion de puissance.

Lorsque la période est faible, le volume de vapeur passe par un maximum et décroît (fig. 68). Pour les périodes plus courtes, ce volume de vapeur a tendance à osciller dès que l'ébullition devient importante (fig. 69 et 70), mais ces oscillations sont rapidement amorties.

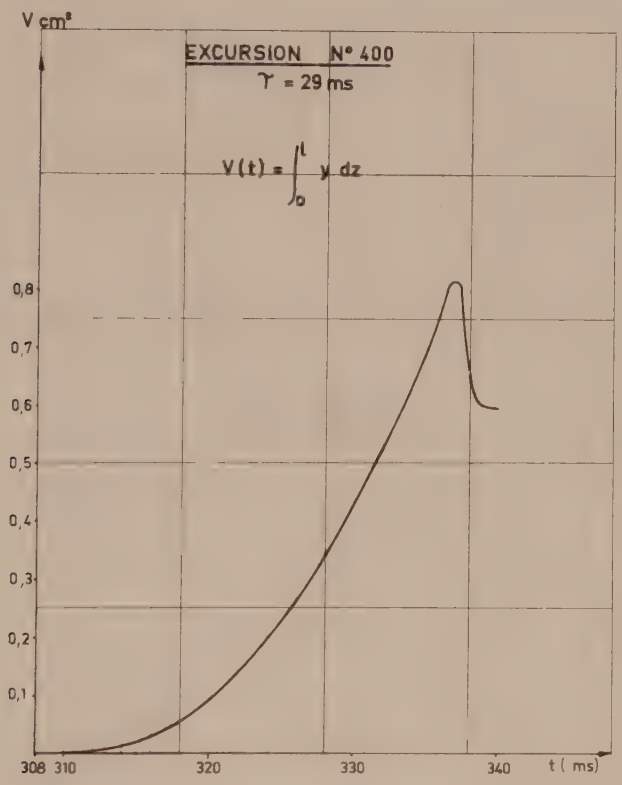

Figure 68 - Evolution du volume de vapeur en fonction du temps.

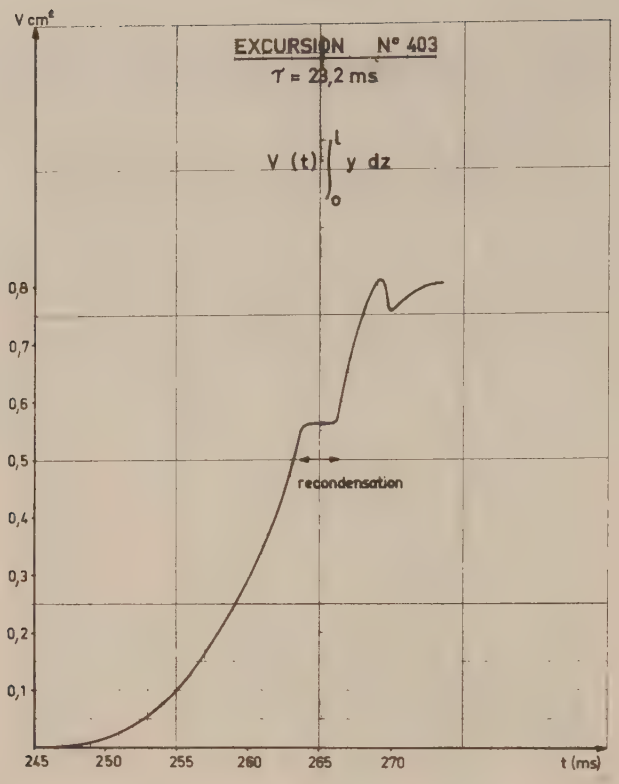

Figure 69 - Evolution du volume de vapeur en fonction du temps.

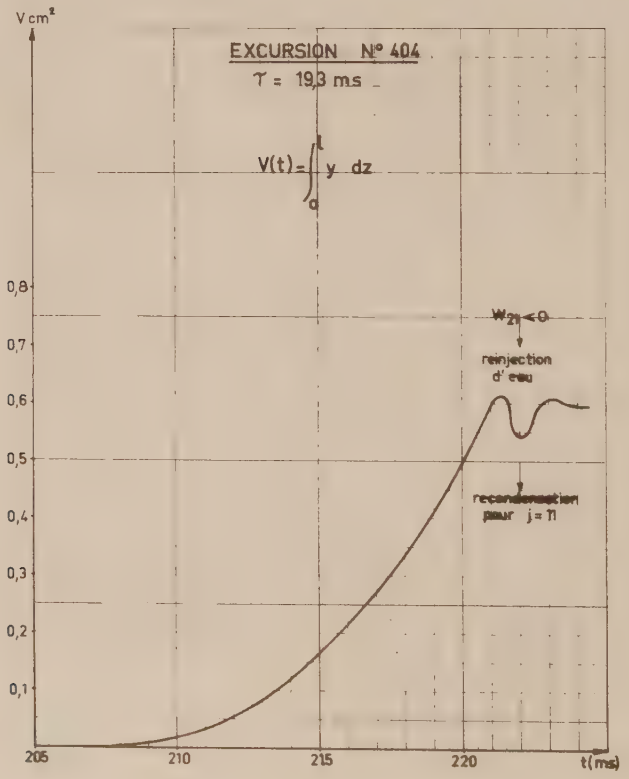

Figure 70 - Evolution du volume de vapeur en fonction du temps.

CHAPITRE V

APPLICATION DE LA METHODE A UN ESSAI DESTRUCTIF

I. - INTRODUCTION

Pour confirmer l'intérêt que présente notre modèle d'ébullition en film, nous l'avons appliqué à une excursion de puissance de période 3,3 ms, analogue à celle qui a provoqué la destruction du coeur de SPERT 1. Il n'est pas question, bien sûr, de comparer expérience et modèle théorique, car les caractéristiques du coeur de SPERT 1 sont différentes de celles du coeur de CABRI et nous ne les avons pas, mais de mettre surtout en évidence les phénomènes physiques qui expliquent l'explosion d'un coeur de réacteur. Nous donnerons dans ce chapitre les courbes essentielles qui démontrent le bien fondé de notre modèle, pour le but que nous nous sommes fixé et que nous venons de rappeler.

II. - RESULTATS OBTENUS POUR L'ESSAI DESTRUCTIF

2.1. - Courbes de puissance et d'énergie

Ces courbes de puissance et d'énergie sont données à titre d'information. La courbe de puissance montre que l'ébullition commence très nettement avant que cette puissance ne passe par son maximum. Le niveau d'énergie dégagée au pic est de l'ordre de 32 MJ. Ces courbes sont données sur la figure 71.

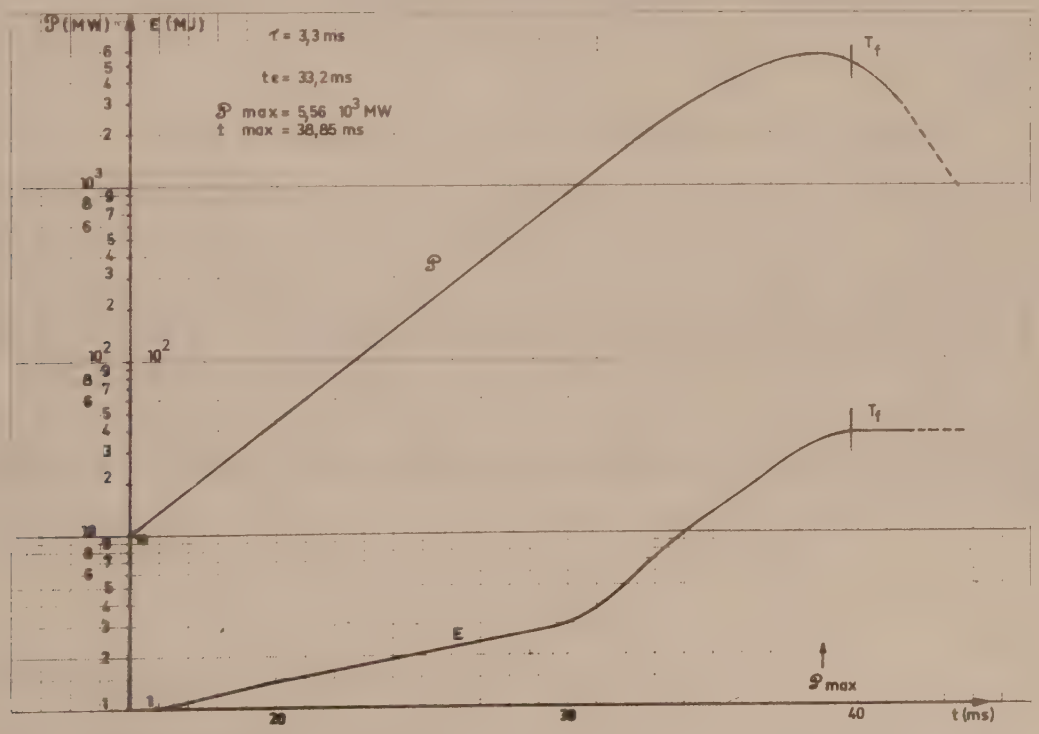

Figure 71 - Courbe de puissance et d'énergie pour la période de 3,3 ms.

2.2. - Courbes d'évolution du film de vapeur et des pressions

Ces courbes sont données ci-dessous. La grandeur A_1-X (en fonction de z) qui représente l'évolution du film de vapeur, apparaît d'abord au centre du canal. Les courbes 1, 2, 3 et 4 (fig. 72) montrent que l'ébullition s'établit difficilement.

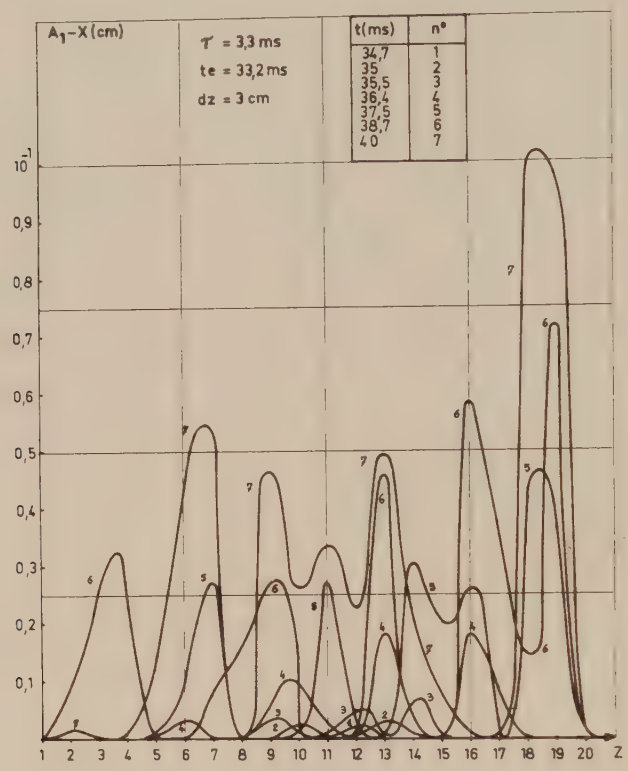

Figure 72 - Evolution du film vapeur, au cours du temps.

Le développement très rapide de la bulle fait croître rapidement la pression qui bloque la croissance de cette même bulle. Ce n'est que lorsque l'ébullition devient suffisamment forte que la bulle de vapeur peut se développer et que le phénomène de marteau d'eau peut apparaître. Ceci est illustré sur les figures 72 et 73. Rappelons que ce phénomène a aussi été constaté lors des expériences faites dans le réflecteur du réacteur KEWB [4] et [5].

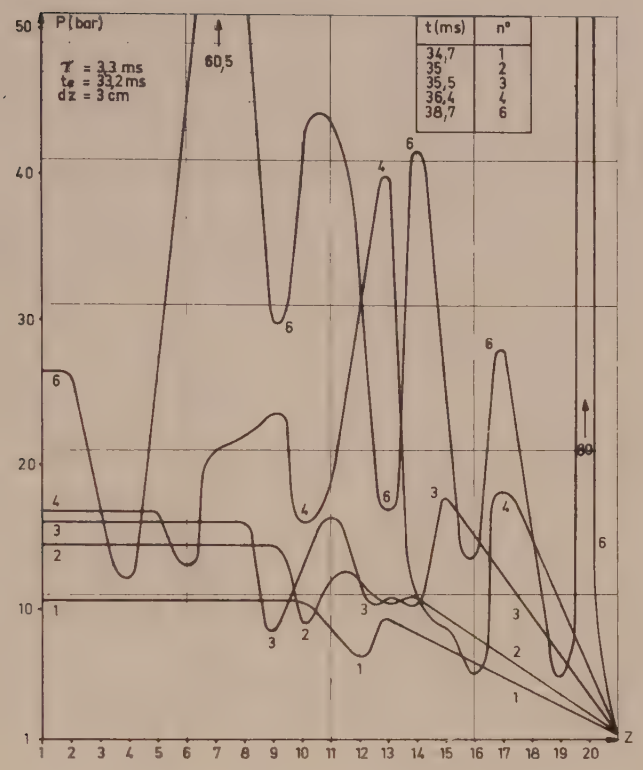

Figure 73 - Evolution de la pression le long du canal, au cours du temps.

Au-delà de l'instant t=37,5 ms, l'énergie dégagée dans le combustible permet à l'ébullition de se développer tout le long de la plaque. Plusieurs effets de marteau d'eau se produisent (fig. 72, courbes 5, 6, 7) suivant l'évolution des flux de chaleur provenant de la plaque, qui provoquent la disparition plus ou moins rapide des micro-couches d'eau et par la suite des films de vapeur.

Les courbes de pression, données sur la figure 73, montrent la complexité des phénomènes et ne permettent pas d'en donner une explication simple, comme dans le cas d'excursions de puissance de périodes plus longues. Notons cependant les ordres de grandeur (60 à 80 bars) des pics de pression obtenus

2.3. - Evolution du film de vapeur au centre du canal

Nous représentons, sur la figure 74, l'évolution du film de vapeur aux cotes j=11 et j=12, en fonction du temps.

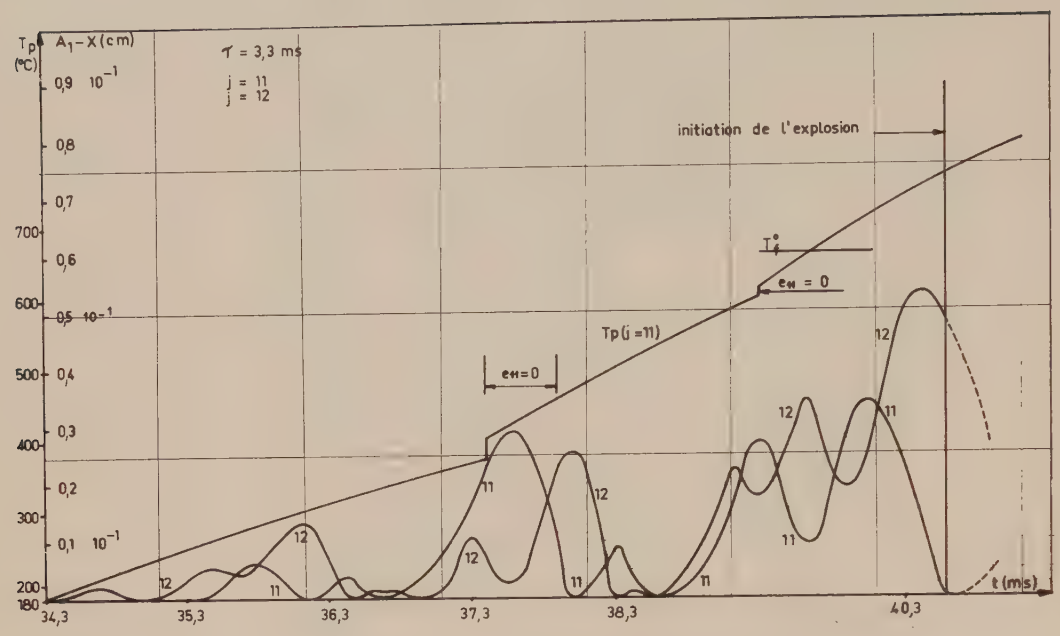

Figure 74 - Evolution du film de vapeur et de la température de plaque au centre du canal.

Nous retrouvons d'abord, après ébullition commençante, la difficulté qu'a l'ébullition à s'établir.

A t=37,4 ms, pour la cote j=11, la microcouche disparaît et l'on retrouve un phénomène déjà rencontré : expansion du film de vapeur, car le rapport $\frac{P}{T_s}$ diminue, puis recondensation de ce film.

A partir de t=38,5 ms, l'ébullition commence à apparaître plus nettement. Pour la cote j=11, les oscillations du film de vapeur s'amplifient, tandis que la température de plaque à cette même cote dépasse sa température de fusion.

L'effet de marteau d'eau que l'on constate à t=40,6 ms, ramène brutalement l'eau du canal en contact avec du métal en fusion. C'est ce phénomène qui apparaît au point le plus chaud, qui initie l'explosion du coeur du réacteur. C'est précisément ce fait que nous voulions mettre en évidence, en adoptant notre modèle d'ébullition en film.

L'évolution du film de vapeur à la cote j=12 est décalée dans le temps par rapport à l'évolution du film de vapeur à la cote j=11, mais seules à cette cote j=11, se trouvent réunies les conditions d'initiation d'explosion : effet de marteau d'eau et fusion du métal de la plaque.

En conclusion, si une telle expérience avait été faite sur CABRI, le réacteur aurait explosé au temps 40,6 ms car la dispersion de métal fondu créée par le marteau d'eau à la cote j=11 aurait servi de détonateur et aurait créé une dispersion identique dans l'ensemble de la région fondue qui, à ce moment, a déjà une certaine importance.

Le fait que ce phénomène se produise presque au moment même du pic de puissance, montre qu'il aurait été possible d'obtenir avec ce type de coeur un phénomène explosif pour des excursions de puissance de périodes plus longues, c'est-à-dire dégageant moins d'énergie. L'explosion, dans ce cas, aurait été différée, comme dans le cas de l'essai explosif de SPERT 1, par rapport au pic de puissance.

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS

Le choix de notre modèle d'ébullition en film a permis de mettre en évidence, lors des études expérimentales faites sur CABRI, l'existence des effets de marteau d'eau, c'est-à-dire de mises en contact brusque de l'eau du canal avec la plaque combustible [19]. Il conduit par là à une explication de l'initiation explosive du coeur d'un réacteur. Il faut cependant noter que ce schéma ne prétend pas être une méthode générale descriptive des phénomènes d'ébullition, mais il rend bien compte des expériences faites sur le réacteur CABRI.

En effet, dans le cas de ce réacteur, les éléments combustibles à plaques sont posés dans une piscine, sur une boîte à eau. L'inertie de cette masse d'eau à la partie inférieure du coeur nous a conduit à supposer les canaux fermés à leur extrémité la plus basse.

Cette hypothèse permet, ainsi que nous le voulions, de rendre compte des phénomènes de transferts thermiques rapides, mais ne peut convenir pour traduire les événements postérieurs à l'excursion de puissance, en particulier l'équilibre atteint après le pic de puissance par la convection naturelle. Ceci est une limitation de notre modèle qui fixe sa validité à quelques dizaines de millisecondes après le début de l'ébullition commençante.

La comparaison des résultats théoriques et expérimentaux obtenus sur le réacteur CABRI est, malgré cette restriction, très satisfaisante. Les courbes de puissance calculées sont en bon accord avec les courbes expérimentales. Notre modèle donne ainsi un moyen de déterminer les énergies dégagées lors d'excursions de puissance.

La recherche des causes de l'accident explosif de SPERT 1 nous a conduit et à interpréter convenablement les excursions de puissance faites sur le réacteur CABRI et à obtenir une bonne explication de l'initiation de l'explosion. Notre modèle d'ébullition en film, qui conduit à ces résultats, peut cependant être amélioré. Il ne tient pas compte de l'impact produit par les effets de marteau d'eau qui provoquent en général des pics de pression. Ce calcul est certainement possible. Il suffit de prendre en compte la propagation de l'onde de pression dans les équations de l'hydrodynamique. Cette amélioration du schéma adopté n'a pas été entreprise par manque de résultats expérimentaux sur le sujet. Notons que la résolution d'une équation de propagation d'onde est certainement simple en adaptant à cette résolution la méthode numérique que nous avons prise pour résoudre $\Delta\Phi = 0$. De plus, l'ensemble des calculs que nous avons faits en géométrie rectangulaire peuvent s'adapter en géométrie cylindrique et ainsi notre modèle doit pouvoir

servir à l'étude du comportement des réacteurs à sodium qui ont des éléments combustibles cylindriques.

Ce modèle ne permet pas, cependant, de calculer la conversion d'énergie nucléaire en énergie mécanique. Il s'agit là d'un phénomène tout autre qui est lié à la dispersion du métal fondu dans un liquide sursaturé. Des tentatives de calculs ont été faites pour évaluer ce rendement, grâce aux lois de la thermodynamique. Elles ont toujours montré que le rendement calculé était très supérieur au rendement réel. Cette question est encore un problème à résoudre.

- : -

UNIVERSITE DE PROVENCE

Place Victor-Hugo (3e)

Tél. 50 11 60

Marseille, le 14 Février 1974

Référence à rappeler :

Le Secrétaire Général

à

Scolarité 3ème cycle

Monsieur François LE BERRE

S/C de Monsieur le Professeur HENNEQUIN

J'ai l'honneur de vous faire savoir que, par décision en date du 12 Février 1974 Monsieur le Président vient d'accorder le permis d'imprimer pour votre thèse de Doctorat d'Etat ès sciences physiques portant sur le sujet suivant :

"CONTRIBUTION A L'INTERPRETATION DES PHENOMENES EXPLOSI SUR LES REACTEURS".

En conséquence, il conviendra de faire figurer les mentions ci-après à la fin du texte (et avant la bibliographie).

" Vu et permis d'imprimer

Marseille, le 12 Février 1974

Le Président,

F. BOREL "

XXXXXXXXXX - Michel Courtin.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R.W. MILLER, A. SOLA "Report on the Spert I destructive test program on an aluminium plate type water moderated reactor" (1964) IDO 16883.

[2] J. AILLOUD "La pile Cabri", Bulletin d'Informations Scientifiques et Techniques (Paris), n° 112 (février 1967).

[3] F. LE BERRE "Interprétation d'excursions de puissance dans une pile à eau dans le cas où le système de refroidissement est à l'arrêt", Rapport CEA R 3202 (1967).

[4] R.W. WRIGHT, S.M. ZIVI "Kinetics studies of heterogeneous water reactors", Annual Summary Report STL 372-50 (1966).

[5] R.W. WRIGHT, S.M. ZIVI "Kinetics studies of heterogeneous water reactors", Annual Summary Report STL 6312.

[6] M. NYER "Etude des phénomènes thermiques et hydrauliques accompagnant une excursion rapide de puissance sur un canal chauffant", Rapport CEA R 3497 (1969).

[7] H.A. JOHNSON et al. "Temperature variation, heat transfer, and void volume development in the transient atmosphere boiling of water", Report N° 163 (1961), University of California.

[8] W.B. HALL and W.C. HARRISON "Transient boiling of water at atmosphere pressure", A.I. Ch. E. Proc. of 3rd Int. Heat Trans. Conf., Chicago (1966), V. 3, p. 186.

[9] Travaux sur les transitoires rapides de puissance à l'Université de Manchester. Safety Research Bulletin UKAEA, Bulletin n° 5.

[10] K. TORIKAI "Boiling heat transfer and burnout mechanism in boiling water cooled reactor", Conférence de Genève (1964), Vol. 8, p. 1580.

[11] MORIN et al. "Fluctuations de températures dans la paroi chauffante et dans le liquide au cours de l'ébullition nucléée", Communication privée au Meeting des spécialistes sur les transferts thermiques en transitoires rapides. Cadarache, avril 1966, Euratom CCR Ispra.

[12] Ernst SCHMIDT - VDI Wasserdampftafeln (1963).

[13] KEEPINS - Nucleonics, Vol. 20, n° 8 (août 1962).

[14] J.P. BAYARD, A. GUILLOU, B. LAGO - Spécification d'un code de diffusion multigroupe à deux dimensions : ALCI. Rapport CEA R 2747 (1965).

[15] Horace LAMB - Hydrodynamics (1932).

[16] R.D. RICHTMYER, K.W. MORTON "Difference methods for initial value problems" (1967).

[17] E. STIEFIEL "Introduction à la mathématique numérique" (1967).

[18] A. TATTEGRAIN "Problèmes d'instrumentation qui se posent dans la dynamique des piles à eau", Bulletin d'Informations Scientifiques et Techniques (Paris), N° 112 (février 1967).

[19] N.J.M. REES "A model investigation of explosive containment in single tank fast reactors", (AWRE-R-5165) (novembre 1965).

[20] J. SALMON, H. CHARPENTIER, J. GUILLOUD, B. LEMAIRE, P. MILLIES "Théorie cinétique des neutrons rapides".

ANNEXE I

CARACTERISTIQUES DU COEUR CABRI

1. - CONSTANTES NEUTRONIQUES ET CARACTERISTIQUES DU COEUR CABRI

Le coeur est composé d'éléments à plaques d'uranium naturel enrichi à 90 % en U_{235}. Il comporte 24 éléments (6 x 4) :

12 sont chargés à 19 plaques,
4 sont chargés à 7 plaques,
4 sont chargés à 6 plaques,
4 sont chargés à 13 plaques (éléments barre de contrôle).

Dans les éléments incomplets on ajoute des plaques d'aluminium de façon à ne pas perturber le débit d'eau dans chaque canal. On dispose ainsi de 20 x 24 canaux d'eau.

Les caractéristiques du coeur sont les suivantes :

$\Lambda = 58,5\ 10^{-6}$ s

$\beta = 0,783\ 10^{-2}$ (783 pcm)

$\delta = 10$ cm

$a = 0,0013$ \$/cm^3

$C_T = 0,019$ \$/°C

Les constantes relatives aux précurseurs de neutrons retardés, utilisées dans les calculs sont tirées de la publication donnée en référence [13].

Groupe de précurseurs de neutrons retardés	λ_i (s^{-1})	a_i
1	0,0127	0,038
2	0,0317	0,213
3	0,115	0,188
4	0,311	0,407
5	1,40	0,128
6	3,87	0,0206

$\ell = 60$ cm

largeur = 6,6 cm

$e_1 = 0,025$ cm
$e_2 = 0,05$ cm
$e_3 = 0,106$ cm

$V_{Al+U} = 6,6\ 10^3$ cm^3
$V_{Al} = 1,3\ 10^4$ cm^3
$V_{H_2O} = 2,8\ 10^4$ cm^3

$P_{atm} = 10^6$ baryes
$H = 5,33$ m
$g = 981$ cm/s^2

2. - CONSTANTES THERMIQUES

$\rho_1 = 3,2$ g/cm^3
$\rho_2 = 2,7$ g/cm^3
$\rho_3 = 1$ g/cm^3

$\lambda_1 = 0,388$ cal/cm °C.s
$\lambda_2 = 0,437$ cal/cm °C.s
$\lambda_3 = 0,145\ 10^{-2}$ cal/cm °C.s

$C_1 = 0,18$ cal/g °C
$C_2 = 0,22$ cal/g °C
$C_3 = 1$ cal/g °C

$\alpha_{Al+U} = 2,5\ 10^{-5}$ cm/cm °C
$\alpha_{Al} = 2,5\ 10^{-5}$ cm/cm °C
$\alpha_{H_2O} = \frac{d\rho}{dT} = 3\ 10^{-4}$ g/cm^3 °C

$T_i = 32$°C

3. - CONSTANTES THERMODYNAMIQUES

$k = \frac{1}{4,18\ 10^7}$ (conversion d'unités)

$\mathcal{L} = 537$ cal/g
$R = 8,32\ 10^7$ erg/°C.mole
$M = 18$ g
$\sigma = 58$ dyne/cm et $\cos\theta = 0,407$ ($\theta = 66°$)
$C_p = 0,472$ cal/g °C

$T_s^{°K} = \frac{a}{L\frac{b}{p}}$

L désigne le logarithme népérien
$a = 4,85\ 10^3$
$b = 3,94\ 10^{11}$

Les constantes thermodynamiques sont tirées de la référence [12].

ANNEXE II

DETERMINATION DU COEFFICIENT DE VIDE MOYEN ET DU COEFFICIENT DE TEMPERATURE MOYEN

Le coeur d'un réacteur étant défini, tant au point de vue géométrique qu'au point de vue chargement en uranium, il est possible de déterminer l'état critique du réacteur. La solution de ce problème est apportée par la résolution des équations de diffusion multigroupe.

Le réacteur est découpé en différents milieux, selon ses constituants, chacun d'eux étant à deux dimensions. Le bilan neutronique dans un élément de volume, pour des neutrons d'énergie E, s'écrit :

$$D(E)\,\nabla^2\,\Phi(E,\vec{r}) - \Sigma(E)\,\Phi(E,\vec{r}) + \int_0^\infty S(E' \to E)\,\Phi(E',\vec{r})\,dE' + \frac{1}{\lambda}\,\chi(E)\int_0^\infty F(E')\,\Phi(E',\vec{r})\,dE' = 0 \qquad (1)$$

$D(E)$ est le coefficient de diffusion

$\Sigma(E)$ est la section efficace totale

$S(E' \to E)$ est la probabilité qu'a un neutron d'énergie E', de voir après un choc son énergie arriver dans la bande E, E + dE

$\chi(E)$ est le spectre de fission

$F(E) = \nu(E)\,\Sigma_f(E)$ où $\nu(E)$ est le nombre de neutrons de fission créés par un neutron d'énergie E, et $\Sigma_f(E)$ est la section efficace de fission.

λ est la valeur propre qui caractérise l'état critique du réacteur.

La résolution de l'équation (1) se fait par discrétisation de l'énergie et en utilisant les fonctions inconnues :

$$\Phi_i(\vec{r}) = \int_{E_{i-1}}^{E_i} \Phi(\vec{r},E)\,dE \qquad 1 \leqslant i \leqslant N \qquad E_o = 0$$

$$\int_{E_{i-1}}^{E_i} D(E)\,\nabla^2\,\Phi(E,\vec{r})\,dE = \nabla^2\,\Phi_i(\vec{r})\,\frac{\displaystyle\int_{E_{i-1}}^{E_i} D(E)\,\nabla^2\,\Phi(E,\vec{r})\,dE}{\displaystyle\int_{E_{i-1}}^{E_i} \nabla^2\,\Phi(E,\vec{r})\,dE}$$

$$\int_{E_{i-1}}^{E_i} \Sigma(E)\ \Phi(E,\vec{r})\ dE = \Phi_i(\vec{r})\ \frac{\int_{E_{i-1}}^{E_i} \Sigma(E)\ \Phi(E,\vec{r})\ dE}{\int_{E_{i-1}}^{E_i} \Phi(E,\vec{r})\ dE}$$

$$\int_{E_{i-1}}^{E_i} dE \int_{o}^{\infty} S(E' \to E)\ \Phi(E',\vec{r})\ dE' = \int_{E_{i-1}}^{E_i} dE \int_{E}^{\infty} S(E' \to E)\ \Phi(E',\vec{r})\ dE'$$

car $S(E' \to E) = 0$ pour $E' < E$

$$\int_{E_{i-1}}^{E_i} dE \int_{E}^{\infty} S(E' \to E)\ \Phi(E',\vec{r})\ dE' = \int_{E_i}^{\infty} dE'\ \Phi(E',\vec{r}) \int_{E_{i-1}}^{E_i} S(E' \to E)\,dE + \int_{E_{i-1}}^{E_i} dE'\,\Phi(E',\vec{r}) \int_{E_{i-1}}^{E'} S(E' \to E)\,dE$$

Si la discrétisation est suffisamment fine, la seconde intégrale double est négligeable devant la première.

$$\int_{E_{i-1}}^{E_i} dE \int_{E}^{\infty} S(E' \to E)\ \Phi(E',r)\ dE' \simeq \int_{E_i}^{\infty} \Phi(E',\vec{r})\ f_i(E')\ dE'$$

avec $f_i(E') = \int_{E_{i-1}}^{E_i} S(E' \to E)\ dE$

En tenant compte de la discrétisation en énergie :

$$\int_{E_i}^{\infty} \Phi(E',\vec{r})\ f_i(E')\ dE' = \sum_{j=i+1}^{j=N} \int_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(E',\vec{r})\ f_i(E')\ dE'$$

or

$$\int_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(E',\vec{r})\ f_i(E')\ dE' = \Phi_j(\vec{r})\ \frac{\int_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(E',\vec{r})\ f_i(E')\ dE'}{\int_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(E',\vec{r})\ dE'}$$

donc

$$\int_{E_{i-1}}^{E_i} dE \int_{E}^{\infty} S(E' \to E)\ \Phi(E',\vec{r})\ dE' = \sum_{j=i+1}^{j=N} \Phi_j(\vec{r})\ \frac{\int_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(E',\vec{r}) f_i(E')\,dE'}{\int_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(E',\vec{r})\ dE'}$$

Le dernier terme s'écrit de la même façon :

$$\frac{1}{\lambda} \int_{E_{i-1}}^{E_i} \chi(E)\, dE \int_{o}^{\infty} F(E')\, \Phi(E',\vec{r})\, dE' = \frac{1}{\lambda} \int_{o}^{\infty} F(E')\, \Phi(E',\vec{r})\, dE' \int_{E_{i-1}}^{E_i} \chi(E)\, dE$$

En posant $\chi_i = \int_{E_{i-1}}^{E_i} \chi(E)\, dE$

$$\frac{1}{\lambda} \int_{E_{i-1}}^{E_i} \chi(E)\, dE \int_{o}^{\infty} F(E')\, \Phi(E',\vec{r})\, dE' = \frac{\chi_i}{\lambda} \int_{o}^{\infty} F(E')\, \Phi(E',\vec{r})\, dE'$$

et en tenant compte du découpage en énergie :

$$\frac{1}{\lambda} \int_{E_{i-1}}^{E_i} \chi(E)\, dE \int_{o}^{\infty} F(E')\, \Phi(E',\vec{r})\, dE' = \frac{\chi_i}{\lambda} \sum_{j=1}^{j=N} \int_{E_{j-1}}^{E_j} F(E')\, \Phi(E',\vec{r})\, dE'$$

$$= \frac{\chi_i}{\lambda} \sum_{j=1}^{j=N} \Phi_i(\vec{r}) \frac{\int_{E_{j-1}}^{E_j} F(E')\, \Phi(E',\vec{r})\, dE'}{\int_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(E',\vec{r})\, dE'}$$

En posant :

$$D_i = \frac{\int_{E_{i-1}}^{E_i} D(E)\, \nabla^2\, \Phi(E,\vec{r})\, dE}{\int_{E_{i-1}}^{E_i} \nabla^2\, \Phi(E,\vec{r})\, dE}$$

$$\Sigma_i = \frac{\int_{E_{i-1}}^{E_i} \Sigma(E)\, \Phi(E,\vec{r})\, dE}{\int_{E_{i-1}}^{E_i} \Phi(E,\vec{r})\, dE}$$

$$S_{j \to i} = \frac{\int_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(E,\vec{r})\, f_i(E)\, dE}{\int_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(E,\vec{r})\, dE}$$

$$\nu_j\, \Sigma_{f,j} = \frac{\int_{E_{j-1}}^{E_j} \nu(E)\, \Sigma_f(E)\, \Phi(E,\vec{r})\, dE}{\int_{E_{j-1}}^{E_j} \Phi(E,\vec{r})\, dE}$$

L'équation (1) devient :

$$D_i \nabla^2 \Phi_i(\vec{r}) - \Sigma_i \Phi_i(\vec{r}) + \sum_{j=i+1}^{j=N} \Phi_j(\vec{r}) S_{j \to i} + \frac{\chi_i}{\lambda} \sum_{j=1}^{j=N} \nu_j \Sigma_{f,j} \Phi_j(\vec{r}) = 0 \qquad (2)$$

$$1 \leqslant i \leqslant N$$

La résolution de telles équations nécessite de connaître les constantes D_i, Σ_i, $S_{j \to i}$, ν_i, $\Sigma_{f,i}$. Ces constantes dépendent de la fonction $\Phi(E,\vec{r})$ fonction inconnue. Pour la détermination de ces constantes, le flux de neutrons est considéré comme indépendant de l'espace, ce qui revient à considérer le réacteur comme étant de dimensions infinies. Ce flux de neutrons, ne dépendant que de l'énergie, vérifie l'équation :

$$- \Sigma(E) \Phi(E) + \int_0^\infty S(E' \to E) \Phi(E') dE' + \frac{1}{\lambda} \chi(E) \int_0^\infty F(E') \Phi(E') dE' = 0$$

et en prenant $$\lambda = \int_0^\infty \nu(E') \Sigma_f(E') \Phi(E') dE'$$

$$\Sigma(E) \Phi(E) = \int_0^\infty S(E' \to E) \Phi(E') dE' + \chi(E)$$

Pour tenir compte des dimensions finies du réacteur, ce qui se traduit par des fuites de neutrons, on introduit un terme supplémentaire $B^2 \Phi(E)$ où B est une valeur propre ne dépendant que de la géométrie (Laplacien géométrique).

$$\left(B^2 + \Sigma(E)\right) \Phi(E) = \int_0^\infty S(E' \to E) \Phi(E') dE' + \chi(E) \qquad (3)$$

On calcule pour quatre groupes d'énergie, D(E), Σ(E), S(E' $\to$ E) et χ(E) en fonction de la densité des corps constituant le réacteur.

L'équation (3) permet de calculer Φ(E) et de déterminer ainsi les constantes D_i, Σ_i, $S_{j \to i}$, ν_i, $\Sigma_{f,i}$ qui sont introduites dans les équations (2) à quatre groupes d'énergie.

Le code ALCI [14] permet de résoudre ces équations et de déterminer en particulier λ qui caractérise l'état critique.

La réactivité du coeur est alors $\rho = \frac{\lambda - 1}{\lambda} 10^5$ en pcm.

En faisant varier la densité du modérateur, c'est-à-dire le nombre d'atomes d'hydrogène, on peut à température fixée (température ambiante), effectuer un nouveau calcul de criticité. En comparant au premier calcul, on définit ainsi le coefficient de vide moyen :

$$C_V = \left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)_T$$ car la variation de volume est proportionnelle au nombre d'atomes.

De même, pour le nombre d'atomes d'hydrogène fixé au départ, on peut, pour différentes températures, effectuer des calculs de criticité. Par comparaison avec le calcul fait initialement, on définit le coefficient de température moyen :

$$C_T = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_V$$

Ceci peut se traduire par la relation :

$d\rho = C_T\, dT + C_V\, dV$ dans laquelle chacun des coefficients C_T et C_V est calculé indépendamment de l'autre.

C_V se calcule à température constante.

C_T se calcule à volume (c'est-à-dire nombre d'atomes d'hydrogène) constant.

- : -

ANNEXE III

DEFINITIONS DES COEFFICIENTS b_1, b_2, b_3

Les éléments combustibles étant encastrés dans une grille rigide, les dilatations du mélange aluminium-uranium et de la gaine ne se font que dans deux dimensions : l'une suivant l'axe des x, l'autre suivant l'axe des z.

α_{Al+U} et α_{Al} désignant les coefficients de dilatation linéaire du mélange Al+U et de l'aluminium, les coefficients globaux de dilatation pour ces deux milieux sont définis par les relations suivantes :

$$b_1 = 2\ \alpha_{Al+U}\ V_{Al+U}$$

$$b_2 = 2\ \alpha_{Al}\ V_{Al}$$

V_{Al+U} et V_{Al} sont les volumes du mélange aluminium-uranium et aluminium.

Le coefficient b_3 traduit la variation de densité du modérateur, à l'état liquide.

M désigne la masse du modérateur.

$M = \rho V$ où ρ et V dépendent de la température T.

Une variation dT de la température donne une variation de masse :

$$dM = V(T)\ d\rho + \rho(T)\ dV$$

La conservation de la masse s'exprime par :

$$V\ d\rho = -\ \rho\ dV$$

$$\frac{dV}{dT} = -\ \frac{d\rho}{dT}\ \frac{V}{\rho}$$

Le coefficient b_3 est finalement défini par la relation :

$$b_3 = \frac{d\rho}{dT}\ \frac{V_{H_2O}}{\rho_{H_2O}}$$

dans laquelle $\frac{d\rho}{dT}$ est une constante prise dans notre étude à 30°C.

ANNEXE IV

EBULLITION

1. - DESCRIPTION MICROSCOPIQUE DE L'EBULLITION

La formation d'une bulle de vapeur se fait à partir d'une cavité située sur la paroi chauffante, appelée site de nucléation. Un tel site est représenté par une cavité conique de rayon r_c. Elle n'est pas mouillée et contient de la vapeur d'eau à une certaine pression. Cette vapeur est emprisonnée et séparée du liquide par une portion de surface sphérique de rayon R.

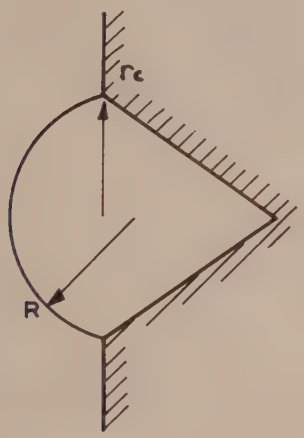

Figure IV.1

Désignons par σ la tension superficielle du liquide,

P_v la pression de la vapeur dans la bulle,

P_ℓ la pression du liquide,

T_v la température de la vapeur près de l'interface,

T_ℓ la température du liquide près de l'interface.

L'interface est en équilibre sous les effets des forces de tension et est soumis aux lois de Laplace :

$$P_v - P_\ell = \frac{2\sigma}{R}$$

$T_v = T_\ell$ à l'interface.

Lorsque t croît, la paroi s'échauffe, ainsi que la température du liquide. Il en est de même de la température de la vapeur, que l'on suppose saturante — si l'on veut réaliser l'équilibre thermodynamique à l'interface.

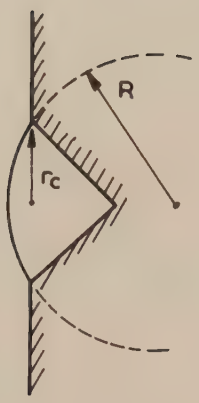

Figure IV.2

Puisque T_v croît, P_v est aussi une fonction croissante du temps t.

Si l'on veut réaliser l'égalité :

$$P_v = P_\ell + \frac{2\sigma}{R}$$

il est nécessaire que R diminue pour assurer l'équilibre thermodynamique, car P_ℓ est pratiquement la pression statique à la cote z envisagée.

L'évolution de la paroi sphérique se fera de la même manière, c'est-à-dire lorsque t croît, la paroi s'échauffe et R diminue. Ce phénomène microscopique atteindra un équilibre instable lorsque R deviendra égal à r_c. La bulle aura atteint son rayon critique

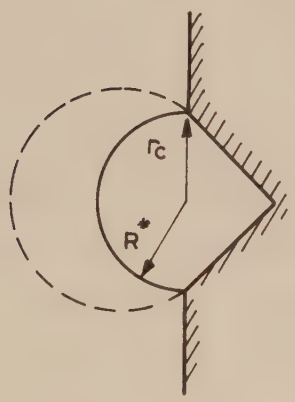

Figure IV.3

$$R^* = r_c$$

Par la suite, la bulle a tendance à augmenter son rayon et à se détacher de la paroi.

L'équilibre thermodynamique n'est plus réalisé et les lois de Laplace ne sont plus valables.

Si l'on tient compte de la viscosité de l'eau, il existe un angle de mouillage entre la bulle et l'eau :

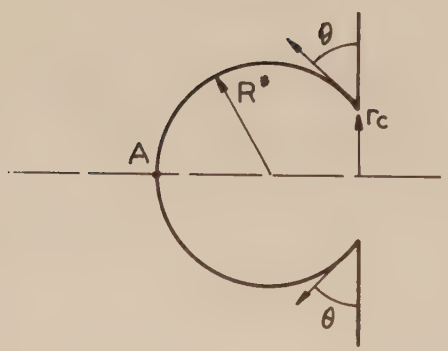

Figure IV.4

$$R^* = \frac{r_c}{\sin\theta}$$

Cet instant, où la bulle atteint son rayon critique, sera l'instant d'apparition de l'ébullition.

En admettant que la bulle ne contienne que de la vapeur saturante :

$$T_v^* = T_{s(P_v)}$$

Les lois de Laplace étant réalisées :

$$T_v^* = T_{s(P_v)} = T_\ell$$

à l'interface et en particulier au point A qui est à la distance de la paroi

$$d = R^* + R^* \cos \theta$$

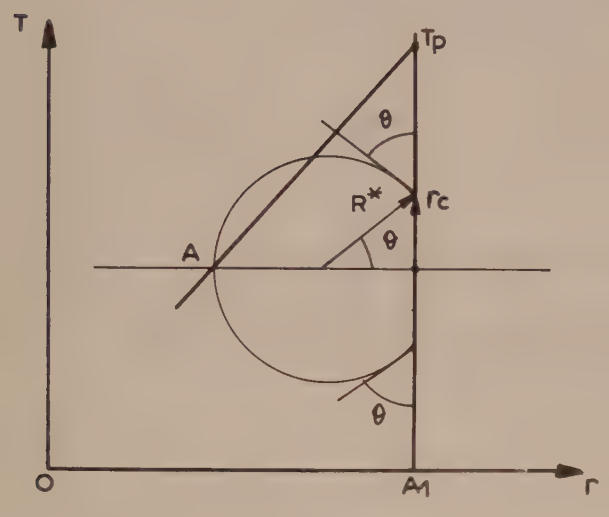

Figure IV.5

L'abscisse de ce même point A est :

$$r = A_1 - R^* (1 + \cos \theta)$$

L'instant d'apparition de l'ébullition sera caractérisé par :

$$T_\ell \left[A_1 - R^* (1 + \cos \theta)\right] = T_s\left(P_\ell + \frac{2\sigma}{R^*}\right)$$

2. - CRITERE D'EBULLITION

Au voisinage de la paroi, le gradient de température dans l'eau est important. En admettant une variation linéaire de la température jusqu'à la distance $d = R^* (1 + \cos \theta)$, l'instant d'apparition sera caractérisé en écrivant que la droite

$$T_1 = T_p + (r - A_1) \frac{\partial T_p}{\partial x}$$

est tangente en A à la courbe

$$T_2 = T_s \left(P_\ell + \frac{2\sigma}{R^*}\right) = T_s \left(P_\ell + \frac{2\sigma (1 + \cos \theta)}{A_1 - r}\right)$$ ceci lorsque $T_p > T_s$

En utilisant la formule de Clapeyron

$$\mathcal{L} = u' T \frac{dP}{dT}$$ où l'on a négligé le volume spécifique de l'eau devant celui de la vapeur et où la formule des gaz parfaits est appliquée à la vapeur :

$$Pu' = \frac{R}{M} T$$

il est possible d'obtenir une relation entre la température de saturation T_s et la pression P :

$$T = \frac{a}{L \frac{P_o}{P}} \qquad a = \frac{M\mathcal{L}}{R}$$ (la chaleur de vaporisation est supposée constante).

En tenant compte de cette relation :

$$T_2 = \frac{a\, T_s}{a - T_s\, L\, [1 - \frac{\alpha}{r-A_1}]} \qquad \alpha = \frac{2\,\sigma\,(1 + \cos\theta)}{P}$$

L'allure de cette courbe est hyperbolique

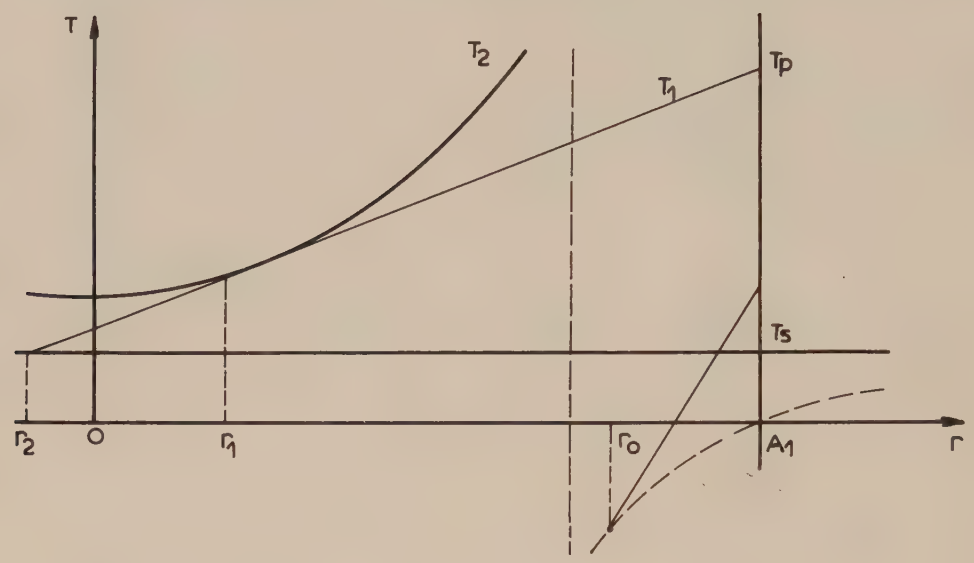

Figure IV.6

Pour exprimer que $T_1(r)$ et $T_2(r)$ se coupent en un point double, on écrit :

$$\begin{cases} T_1(r) - T_2(r) = 0 \\ T_1'(r) - T_2'(r) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \left[T_p + (r-A_1)\,\frac{\partial T_p}{\partial x}\right]\left[a - T_s\, L\left(1 - \frac{\alpha}{r-A_1}\right)\right] - a\, T_s = 0 \\ \left[T_p + (r-A_1)\,\frac{\partial T_p}{\partial x}\right]\left[-\, T_s\, \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r-A_1}}\, \frac{\alpha}{(r-A_1)^2}\right] - \frac{\partial T_p}{\partial x}\left[a - T_s\, L\left(1 - \frac{\alpha}{r-A_1}\right)\right] = 0 \end{cases}$$

Posons $r - A_1 = R$

$$\begin{cases} \left(T_p + R\,\frac{\partial T_p}{\partial x}\right)\left(a - T_s\, L\left\{1 - \frac{\alpha}{R}\right\}\right) - a\, T_s = 0 \\ \left(T_p + R\,\frac{\partial T_p}{\partial x}\right)\left(\frac{-\,\alpha\, T_s}{R^2 - \alpha R}\right) + \frac{\partial T_p}{\partial x}\left(a - T_s\, L\left\{1 - \frac{\alpha}{R}\right\}\right) = 0 \end{cases}$$

En combinant ces deux équations nous trouvons une équation du second degré en R :

$$R^2 \left[ap - 2\sigma(1 + \cos\theta) \frac{\partial T_p}{\partial x} \right] \frac{\partial T_p}{\partial x} - 2\sigma(1 + \cos\theta) \frac{\partial T_p}{\partial x} (2 T_p + a) R$$
$$- 2\sigma(1 + \cos\theta) T_p^2 = 0$$

$$\Delta' = \sigma(1 + \cos\theta) \frac{\partial T_p}{\partial x} a \left[\sigma(1 + \cos\theta) \frac{\partial T_p}{\partial x} (a + 4 T_p) + 2 p T_p^2 \right]$$

Le discriminant est toujours positif. Il y a donc deux racines en R. Il faut prendre la plus petite racine en r, donc en R.

$$R_1 = \frac{\sigma(1 + \cos\theta) \frac{\partial T_p}{\partial x} (2 T_p + a) - \sqrt{\Delta'}}{\left[a p - 2\sigma(1 + \cos\theta) \frac{\partial T_p}{\partial x} \right] \frac{\partial T_p}{\partial x}}$$

Numériquement le test d'ébullition se fait dès que $T_p > T_s$ sur le changement de signe $T_1 - T_2$.

Pour $t < t_e$ $\quad T_1 - T_2 < 0$

Pour $t > t_e$ $\quad T_1 - T_2 > 0$

or $$T_1 - T_2 = T_p + R_1 \frac{\partial T_p}{\partial x} - \frac{a T_s}{a - T_s L \left(1 - \frac{2\sigma (1 + \cos\theta)}{p R_1} \right)}$$

Donc si :

$$\left(T_p + R_1 \frac{\partial T_p}{\partial x} \right) \left(a - T_s L \left\{ 1 - \frac{2\sigma (1 + \cos\theta)}{p R_1} \right\} \right) - a T_s < 0 \qquad (1)$$

il n'y a pas encore ébullition

si $$\left(T_p + R_1 \frac{\partial T_p}{\partial x} \right) \left(a - T_s L \left\{ 1 - \frac{2\sigma (1 + \cos\theta)}{p R_1} \right\} \right) - a T_s > 0 \qquad (2)$$

il y a ébullition.

3. - DETERMINATION DU VOLUME DE VAPEUR

La pellicule infiniment mince de vapeur qui apparaît à $t_e(z)$ va par la suite évoluer; elle est d'une part alimentée par la microcouche d'eau surchauffée qu'elle a emprisonnée entre la paroi et elle, et d'autre part elle est en contact par son autre face avec de l'eau plus froide, ce qui est susceptible de faire condenser une certaine quantité de vapeur.

Pour déterminer le volume de vapeur formé, nous écrirons d'abord que la quantité de chaleur qui provient de la plaque sert à la vaporisation de la microcouche.

$$\mathcal{L} \rho_3 \frac{\partial e}{\partial t} = - \lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} \right)_{(A_1 - e)}$$

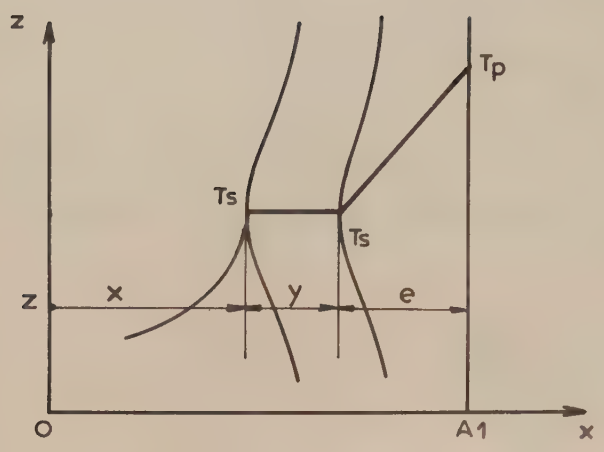

Figure IV.7

L'hypothèse d'une distribution linéaire dans la microcouche d'eau permet d'écrire cette relation sous la forme :

$$\mathcal{L}\rho_s \frac{\partial e}{\partial t} = -\lambda_s \frac{(T_p - T_s)}{e}$$

soit :

$$\frac{\mathcal{L}\rho_s}{2}\frac{\partial e^2}{\partial t} = -\lambda_s (T_p - T_s)$$

Cette équation détermine la quantité e.

Ensuite, nous déterminerons la quantité y en exprimant qu'il y a conservation de la masse.

Considérons une tranche élémentaire de hauteur dz. Il n'y a pas de vitesse dans la vapeur et l'eau.

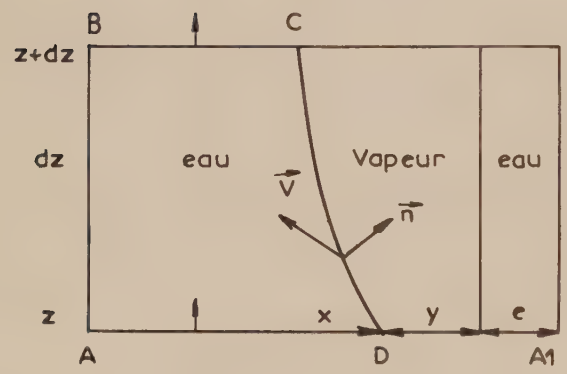

Figure IV.8

$$\rho_s \frac{\partial e}{\partial t}\,dz + \frac{\partial(\rho_v\, y)}{\partial t}\,dz + \rho_s \frac{\partial X}{\partial t}\,dz + \int_B^C \rho_s \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z+dz)\,dx - \int_A^D \rho_s \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z)\,dx = 0$$

Il n'y a pas d'interpénétration entre l'eau et la vapeur, et la vitesse horizontale u le long de AB est nulle.

L'hypothèse $\Delta\Phi = 0$ dans le domaine élémentaire ABCD peut se traduire par :

$$\iiint_{ABCD} \Delta\Phi \; d\tau = 0 \quad \text{ou encore par}$$

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\sigma = 0$$

Γ désigne le contour ABCD.

$\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ la dérivée normale $\quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi \cdot \vec{n}$ où $\vec{n}$ est par exemple la normale unitaire extérieure.

$d\sigma$ est l'élément de longueur sur Γ

$$\int_A^B \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, d\sigma = -\int_z^{z+dz} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dz = 0 \qquad \text{car le long de AB } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u = 0$$

$$\int_B^C \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\sigma = \int_B^C \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dx$$

Le long de CD :

$$\int_C^D \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\sigma = \int_C^D \overrightarrow{\text{grad}\ \Phi} \cdot \vec{n}\ d\sigma$$

L'équation de la courbe CD est $x - X(z,t) = 0$ et la normale unitaire extérieure a pour composantes $\vec{n} \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2}} \\ -\dfrac{\partial X}{\partial z} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2}} \end{array} \right.$

$d\sigma^2 = dz^2 \left[1 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2\right]$ et puisque lorsque l'on se déplace de C à D, dz est négatif

$$d\sigma = -\, dz \sqrt{1 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2}$$

$$\int_C^D \overrightarrow{\text{grad}\ \Phi} \cdot \vec{n}\, d\sigma = -\int_C^D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}\right) dz$$

$$\int_D^D \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\sigma = \int_D^A \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dx$$

En regroupant ces résultats nous obtenons la relation suivante :

$$\int_B^C \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z+dz)\, dx - \int_C^D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}\right) dz + \int_D^A \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z)\, dx = 0$$

L'équation qui exprime la conservation de la masse devient :

$$\rho_s \frac{\partial e}{\partial t}\, dz + \frac{\partial (\rho_v y)}{\partial t}\, dz + \rho_s \frac{\partial X}{\partial t}\, dz - \rho_s \int_D^C \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}\right) dz = 0$$

Evaluons l'intégrale par la méthode des trapèzes :

$$\int_D^C \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}\right) dz = \frac{dz}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}\right)_z + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}\right)_{z+dz}\right]$$

La relation devient :

$$\rho_s \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_v y)}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\rho_s}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}\right)_z + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}\right)_{z+dz}\right] = 0$$

En faisant tendre dz vers 0, nous arrivons à l'équation :

$$\rho_s \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_v y) + \rho_s \frac{\partial X}{\partial t} - \rho_s \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}\right]_{x=X} = 0$$

De plus $y = A_1 - X - e$

$$\rho_s \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t}\right) = -\rho_s \frac{\partial y}{\partial t}$$

L'équation qui définit y s'écrit finalement : $\rho_s \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_v y) - \rho_s \left(u - w \frac{\partial X}{\partial z}\right)_{x=X}$

- : -

ANNEXE V

CONDITIONS D'INTERFACE ENTRE DEUX MILIEUX DIFFERENTS

La résolution des équations de conduction nécessite d'exprimer sous forme discrétisée les conditions limites entre deux milieux de conductivité, de densité et de diffusivité différentes. Ces conditions limites sont : l'égalité des températures et l'égalité des flux calorifiques. Elles seront discrétisées sur l'interface gaine-combustible et seront aisément applicables à l'interface gaine-eau, en tenant compte du fait qu'aucun de ces milieux ne contient de sources.

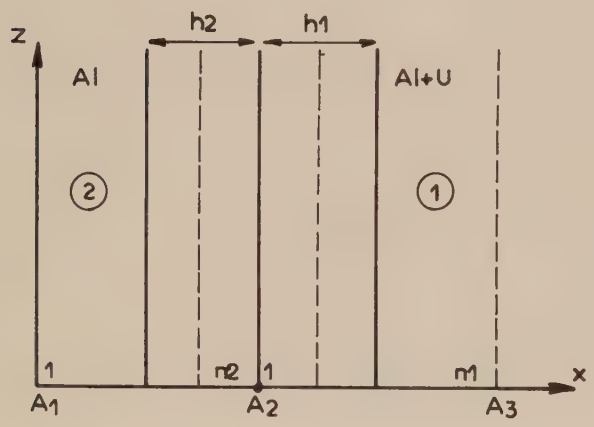

Figure V.1

Les conditions à exprimer sont les suivantes :

$$T_1 (A_2) = T_2 (A_2) \qquad (1)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} (A_2) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} (A_2) \qquad (2)$$

La première relation s'exprime par

$$T_{1,1} = T_{2,n_2} \qquad (3)$$

Pour exprimer la seconde condition, il faut revenir aux équations de conduction

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + S(z,t) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \qquad (5)$$

Intégrons l'équation (4) entre A_2 et $A_2 + \frac{h_1}{2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_2}^{A_2 + \frac{h_1}{2}} T_1 \, dx = a_1 \left[\frac{\partial T_1}{\partial x} (A_2 + \frac{h_1}{2}) - \frac{\partial T_1}{\partial x} (A_2) \right] + S_j^n \frac{h_1}{2}$$

En considérant constante la valeur de T_1 dans l'intervalle $[A_2, A_2 + \frac{h_1}{2}]$ et égale à $T_1 = T_{1,1}$ nous obtenons :

$$\frac{h_1}{2} \frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{1,1}^n}{\delta t} = a_1 \left[\frac{\partial T_1}{\partial x} (A_2 + \frac{h_1}{2}) - \frac{\partial T_1}{\partial x} (A_2) \right] + \frac{h_1}{2} S_j^n$$

soit :

$$\frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{1,1}^{n}}{\delta t} = \frac{2a_1}{h_1}\left[\frac{\partial T_1}{\partial x}\left(A_2 + \frac{h_1}{2}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial x}\left(A_2\right)\right] + S_j^n \qquad (6)$$

Intégrons l'équation (5) entre $A_2 - \frac{h_2}{2}$ et A_2

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_2 - \frac{h_2}{2}}^{A_2} T_2 \, dx = a_2\left[\frac{\partial T_2}{\partial x}\left(A_2\right) - \frac{\partial T_2}{\partial x}\left(A_2 - \frac{h_2}{2}\right)\right]$$

En prenant pour T_2 dans l'intervalle $[A_2 - \frac{h_2}{2},\ A_2]$ $T_2 = T_{2,n_2}$ cette relation devient :

$$\frac{h_2}{2}\ \frac{T_{2,n_2}^{n+1} - T_{2,n_2}^{n}}{\delta t} = a_2\left[\frac{\partial T_2}{\partial x}\left(A_2\right) - \frac{\partial T_2}{\partial x}\left(A_2 - \frac{h_2}{2}\right)\right]$$

ou encore :

$$\frac{T_{2,n_2}^{n+1} - T_{2,n_2}^{n}}{\delta t} = \frac{2a_2}{h_2}\left[\frac{\partial T_2}{\partial x}\left(A_2\right) - \frac{\partial T_2}{\partial x}\left(A_2 - \frac{h_2}{2}\right)\right] \qquad (7)$$

En multipliant (6) par $\frac{\lambda_1 h_1}{2a_1}$ et (7) par $\frac{\lambda_2 h_2}{2a_2}$, et en tenant compte d'une part de la relation (2), d'autre part de la relation (3), nous obtenons :

$$\frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{1,1}^{n}}{\delta t}\left(\frac{\lambda_1 h_1}{2a_1} + \frac{\lambda_2 h_2}{2a_2}\right) = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\left(A_2 + \frac{h_1}{2}\right) - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\left(A_2 - \frac{h_2}{2}\right) + \frac{\lambda_1 h_1}{2a_1} S_j^n \qquad (8)$$

En écrivant :

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}\left(A_2 - \frac{h_2}{2}\right) = \frac{T_{2,n_2} - T_{2,n_2-1}}{h_2} = \frac{T_{1,1} - T_{2,n_2-1}}{h_2}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}\left(A_2 + \frac{h_1}{2}\right) = \frac{T_{1,2} - T_{1,1}}{h_1}$$

l'équation (8) devient :

$$\frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{1,1}^{n}}{\delta t}\left(\frac{\lambda_1 h_1}{2a_1} + \frac{\lambda_2 h_2}{2a_2}\right) = \frac{\lambda_1}{h_1}\left[T_{1,2} - T_{1,1}\right] - \frac{\lambda_2}{h_2}\left[T_{1,1} - T_{2,n_2-1}\right] + \frac{\lambda_1 h_1}{2a_1} S_j^n$$

En multipliant par $\frac{2a_1}{\lambda_1 h_1}$ cette relation s'écrit :

$$\frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{1,1}^{n}}{\delta t}\left(1 + \frac{\lambda_2 h_2 a_1}{\lambda_1 h_1 a_2}\right) = S_j^n + \frac{2a_1}{h_1}\left[\frac{T_{1,2} - T_{1,1}}{h_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{T_{1,1} - T_{2,n_2-1}}{h_2}\right]$$

Dans le second membre, les températures peuvent être prises à $n\delta t$ ou à $(n+1)\delta t$.
Nous pondérons par le coefficient θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$.

$$\frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{1,1}^{n}}{\delta t}\left(1 + \frac{\lambda_2 h_2 a_1}{\lambda_1 h_1 a_2}\right) = S_j^n + \frac{2a_1}{h_1}\left\{\theta\,\frac{T_{1,2}^{n+1} - T_{1,1}^{n+1}}{h_1} - \theta\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{2,n_2-1}^{n+1}}{h_1}\right.$$
$$\left. + (1-\theta)\,\frac{T_{1,2}^{n} - T_{1,1}^{n}}{h_1} - (1-\theta)\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\frac{T_{1,1}^{n} - T_{2,n_2-1}^{n}}{h_2}\right\} \qquad (9)$$

$\theta=0$ correspond à une méthode explicite ; $\theta=1$ correspond à une méthode implicite.

Figure V.2

Cette équation (9) se transpose simplement pour exprimer les conditions limites entre la gaine et l'eau, compte tenu qu'il n'existe aucune source dans ces deux milieux.

Rappelons que h désigne le pas en x dans le modérateur

$$h = \frac{A_1}{n_I - 1}$$

$$\frac{T_{2,1}^{n+1} - T_{2,1}^{n}}{\delta t}\left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\frac{h}{h_2}\frac{a_2}{a_3}\right) = \frac{2a_2}{h_2}\left\{\theta\,\frac{T_{2,2}^{n+1} - T_{2,1}^{n+1}}{h_2} - \theta\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\,\frac{T_{2,1}^{n+1} - T_{3,n_I-1}^{n+1}}{h} + (1-\theta)\,\frac{T_{2,2}^{n} - T_{2,1}^{n}}{h_2}\right.$$

$$\left. - (1-\theta)\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\,\frac{T_{2,1}^{n} - T_{3,n_I-1}^{n}}{h}\right\} \qquad (10)$$

Dans l'établissement des équations (9) et (10) nous avons tenu compte de l'égalité des températures aux interfaces :

$$T_{2,n_2} = T_{1,1}$$

$$T_{3,n_I} = T_{2,1}$$

ANNEXE VI

DETERMINATION DES FONCTIONS y(z,t) et e(z,t)

a) Equation permettant de calculer la fonction y(z,t)

Du fait qu'il existe dans le calcul numérique un maillage en z, la formule que nous établirons sera légèrement différente de celle établie dans l'Annexe IV. C'est toujours, bien sûr, une loi de conservation de masse.

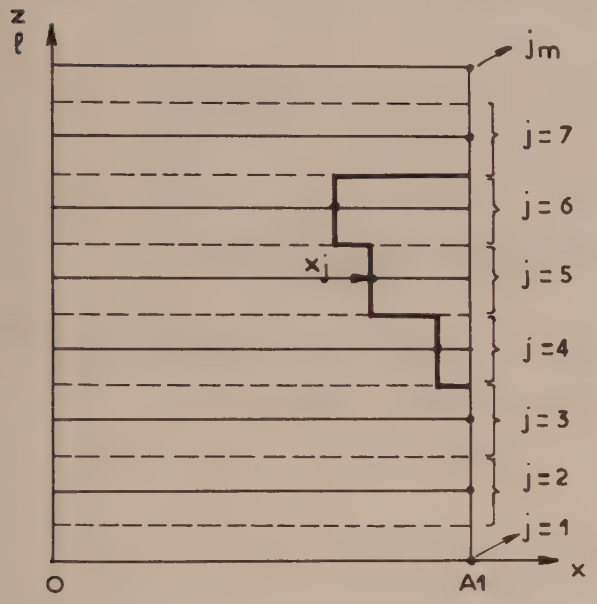

Figure VI.1

Le découpage en z définit épaisseur de vapeur et microcouche d'eau par des morceaux de droites, tel que le montre la figure ci-contre. X, y et e sont considérés comme indépendants de z dans chaque demi-tranche entourant le point de cote z caractérisé par la valeur de l'indice j.

Nous allons considérer l'évolution de la masse d'une tranche d'indice j entre les deux instants, t et t+δt.

L'indice 1 se rapporte à l'instant t, l'indice 2 se rapporte à l'instant t+δt.

A l'instant t la masse dans la tranche j est égale à

$$m_t = (\rho_v y)_1 + \rho_3 e_1$$

à t+δt :

$$m_{t+\delta t} = (\rho_v y)_2 + \rho_3 e_2$$

d'où :

$$(\rho_v y)_2 - (\rho_v y)_1 + \rho_3 e_2 - \rho_3 e_1 = \rho_3 u_X dt - \rho_3 (X_2 - X_1)$$

$$d(\rho_v y) + \rho_3 de + \rho_3 dX = \rho_3 u_X dt$$

De plus $A_1 = X+y+e$

donc: $d(\rho_v y) - \rho_3 dy = \rho_3 u_X dt$

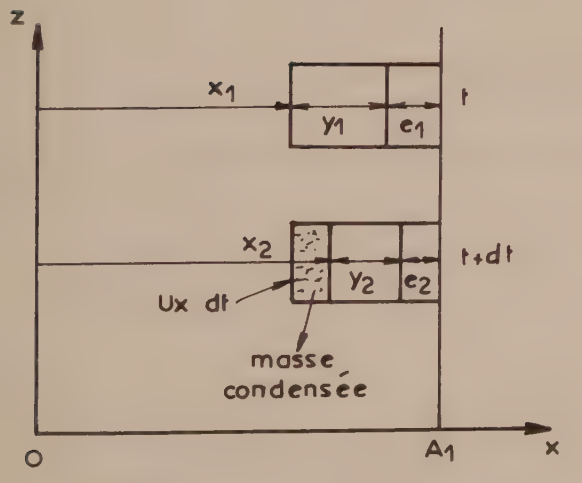

Figure VI.2

L'équation qui donne y s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_v y) - \rho_s \frac{\partial y}{\partial t} = \rho_s \, u_X \qquad (1)$$

Cette équation a déjà été établie dans l'Annexe IV en négligeant le terme $\frac{\partial X}{\partial z}$ ce qui correspond à la définition de X par segments de droites.

L'équation (1) est transformée en tenant compte de la loi des gaz parfaits :

$$\frac{P}{\rho_v} = \frac{R}{M} T$$

$$\rho_v y = y \frac{P}{T} \frac{M}{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_v y) = \frac{M}{R}\left[y \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{T}\right) + \frac{P}{T} \frac{\partial y}{\partial t}\right] \qquad (2)$$

En reportant dans (1) on obtient la relation :

$$\frac{\partial y}{\partial t}\left[\rho_s - \rho_v\right] = \frac{M}{R} y \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{T}\right) - \rho_s \, u_X$$

La loi qui lie la pression de vapeur à la température est de la forme :

$$P = b \, e^{-\frac{a}{T}} \qquad (3)$$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{T}\right) = \frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{P}{T^2}\frac{\partial T}{\partial t}$ devient en tenant compte de (3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{T}\right) = \frac{P}{T^2}\frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{a}{T} - 1\right)$$

d'où : $$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\rho_s - \rho_v}\left[y \frac{M}{R}\frac{P}{T^2}\frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{a}{T} - 1\right) - \rho_s \, u_X\right]$$

que l'on écrit :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\rho_s - \rho_v}\left[\frac{y \, \rho_v}{T}\frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{a}{T} - 1\right) - \rho_s \, u_X\right] \qquad (4)$$

b) <u>Equation permettant de calculer la fonction e(z,t)</u>

L'évolution de la microcouche est régie par une équation de conservation d'énergie :

$$\mathcal{L} \rho_s \frac{\partial e}{\partial t} = - \lambda_s \left(\frac{T_s}{x}\right)_{A_1 - e}$$

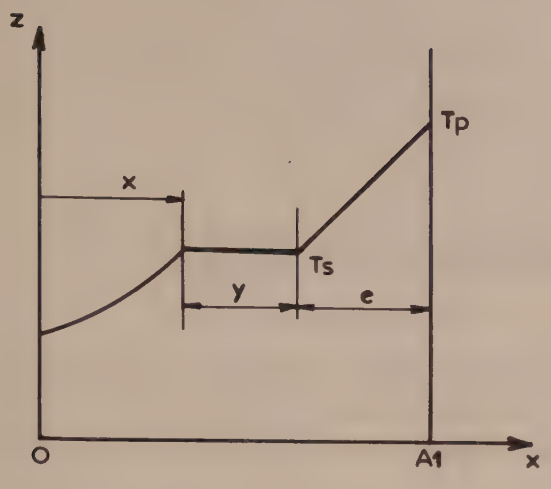

Figure VI.3

La microcouche d'eau étant mince, la température dans cette microcouche est considérée comme linéaire.

$$\mathcal{L}\rho_3 \frac{\partial e}{\partial t} = -\lambda_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial x}\right)_{A_1} \qquad (4)$$

relation qui exprime que le flux de chaleur sortant de la plaque sert à vaporiser la microcouche d'eau.

$$\left(\frac{\partial T_3}{\partial x}\right)_{A_1} = \frac{T_p - T_s}{e}$$

L'équation (4) se transforme ainsi :

$$\mathcal{L}\rho_3 \frac{\partial e}{\partial t} = -\lambda_3 \frac{(T_p - T_s)}{e}$$

d'où $$\frac{\partial}{\partial t} e^2 = -\frac{2\lambda_3}{\mathcal{L}\rho_3} (T_p - T_s) \qquad (5)$$

telle est l'équation différentielle qui détermine e(z,t).

ANNEXE VII

TRANSFERT D'ENERGIE ENTRE LA PLAQUE ET L'EAU DU DEMI-CANAL

Il s'agit d'exprimer la conservation de l'énergie entre la vapeur, la microcouche d'eau et la plaque. Comme il est précisé dans l'Annexe VI, le maillage en z nécessite numériquement de définir X, y et e par morceaux. Pour une tranche d'indice j, nous allons exprimer la conservation de l'énergie.

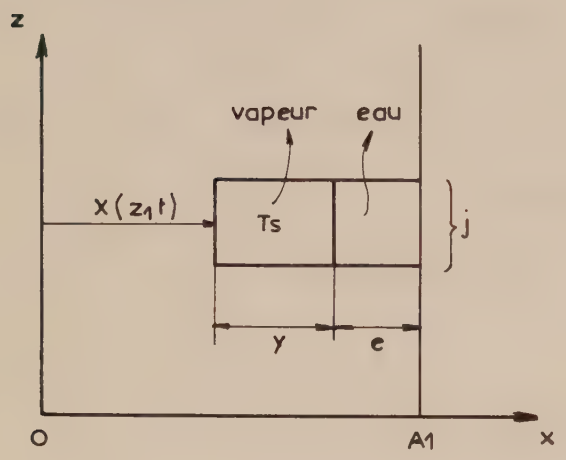

Figure VII.1

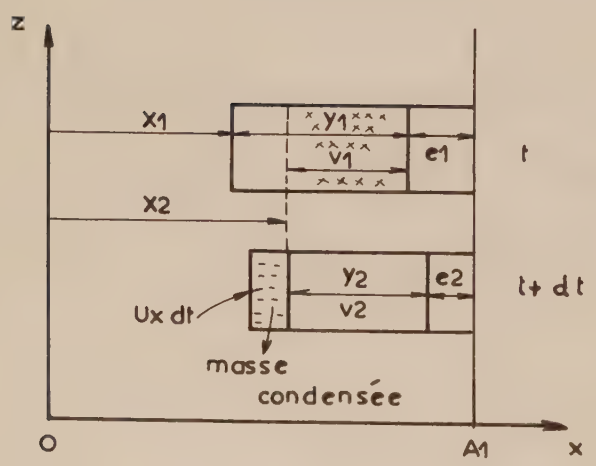

Figure VII.2

$$\delta t \left[\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) - \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) \right]$$

$$= C_p \rho_v y \, dT_s + \mathcal{L} \, d(\rho_v y) + \mathcal{P} \qquad (1)$$

Cette équation exprime que la différence des quantités de chaleur en A_1 et en X est répartie en :

$Q_1 = C_p \rho_v y \, dT_s$

quantité de chaleur qui sert à l'échauffement de la vapeur à pression constante entre t et t+δt

$Q_2 = \mathcal{L} \, d(\rho_v y)$

quantité de chaleur qui sert à la vaporisation

$Q_3 = \mathcal{P}$

quantité de chaleur qui correspond au travail de la vapeur.

Pour l'évaluation du travail de la vapeur, l'instant t sera repéré par l'indice 1, l'instant t+δt sera repéré par l'indice 2.

$\mathcal{P} = p \, dV$

$V_2 = y_2$

$dV = V_2 - V_1$

$y_1 - V_1$ est la partie de vapeur qui se condense.

En exprimant la conservation de la masse :

$$- \rho_3 (e_2 - e_1) + \rho_v (y_1 - V_1) = \rho_3 (X_2 - X_1 - u_X\, dt)$$

$$- \rho_3\, de + \rho_v (y_1 - V_1) = \rho_3\, dX - \rho_3\, u_X\, dt$$

$$\rho_v (y_1 - V_1) = \rho_3 (dX + de) - \rho_3\, u_X\, dt$$

or $A_1 = X + y + e$

d'où : $\rho_v (y_1 - V_1) = -\rho_3\, dy - \rho_3\, u_X\, dt$

En tenant compte de l'équation de conservation de masse établie dans l'Annexe VI :

$$d(\rho_v y) = \rho_3\, dy + \rho_3\, u_X\, dt$$

on obtient : $\rho_v (y_1 - V_1) = - d(\rho_v y)$

$$y_1 - V_1 = - \frac{1}{\rho_v} d(\rho_v y)$$

L'expression donnant le travail de la vapeur s'écrit :

$$\mathcal{C} = p(V_2 - V_1) = p \left[y_2 - y_1 - \frac{1}{\rho_v} d(\rho_v y) \right]$$

Si l'on exprime $\mathcal{C}$ en calories, le coefficient de changement d'unités k est égal à $\frac{1}{4{,}18\ 10^7}$

$$\mathcal{C} = kp \left[dy - \frac{1}{\rho_v} d(\rho_v y) \right]$$

d'où l'équation qui exprime la conservation de l'énergie :

$$\delta t \left[\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) - \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) \right] = C_p\, \rho_v y\, dT_s + \mathcal{L}\, d(\rho_v y) + kp \left[dy - \frac{1}{\rho_v} d(\rho_v y) \right]$$

qui s'écrit sous la forme :

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) - \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) = C_p\, \rho_v y \frac{\partial T_s}{\partial t} + (\mathcal{L} - \frac{kp}{\rho_v}) \frac{\partial}{\partial t}(\rho_v y) + kp \frac{\partial y}{\partial t} \qquad (2)$$

Cette équation (2) peut être écrite différemment en tenant compte des relations :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\rho_3 - \rho_v} \left[y \frac{\rho_v}{T_s} \frac{\partial T_s}{\partial t} (\frac{a}{T_s} - 1) - \rho_3\, u_X \right]$$

$$\frac{\partial (\rho_v y)}{\partial t} = \frac{y\, M}{R} \frac{P}{T_s^2} \frac{\partial T_s}{\partial t} (\frac{a}{T_s} - 1) + \rho_v \frac{\partial y}{\partial t}$$

relations établies dans l'Annexe VI.

En écrivant la loi des gaz parfaits $\rho_v = \frac{PM}{RT}$

le second membre de (2) devient :

$$C_p\ \rho_v y \frac{\partial T_s}{\partial t} + \left(\mathcal{L} - \frac{kP}{\rho_v}\right)\frac{\partial T_s}{\partial t}\frac{y}{T_s}\rho_v\left(\frac{a}{T_s} - 1\right)\lambda + \frac{\mathcal{L}\rho_v}{\rho_3 - \rho_v}\left[\frac{y\ \rho_v}{T_s}\frac{\partial T_s}{\partial t}\left(\frac{a}{T_s} - 1\right) - \rho_3\ u_X\right]$$

Finalement l'équation (2) prend la forme suivante :

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) - \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) = y\ \rho_v \frac{\partial T_s}{\partial t}\left[C_p + \left(\frac{a}{T_s} - 1\right)\left(\frac{\mathcal{L}}{T_s} - \frac{kR}{M} + \frac{\mathcal{L}}{T_s}\frac{\rho_v}{\rho_3 - \rho_v}\right)\right]$$

$$- \frac{\mathcal{L}\ \rho_3\ \rho_v}{\rho_3 - \rho_v}\ u_X \qquad (3)$$

avec $\rho_v = \frac{PM}{RT_s}$

et $P = b\ e^{-\frac{a}{T_s}}$

- : -

ANNEXE VIII

RESOLUTION DU LAPLACIEN $\Delta\Phi = 0$

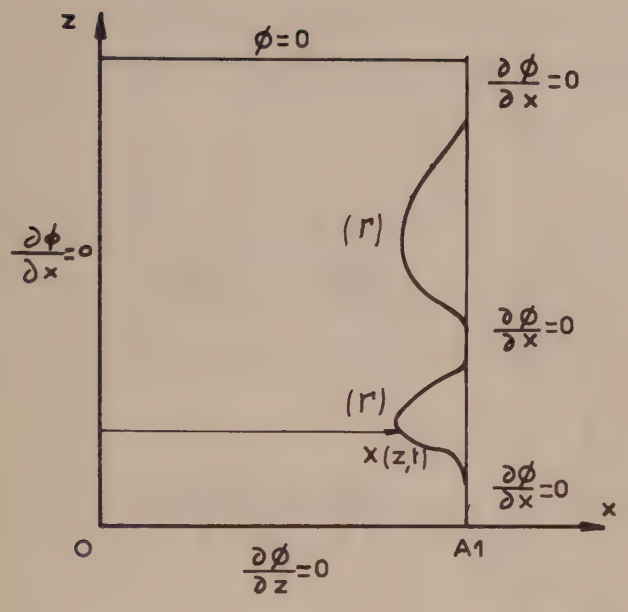

Figure VIII.1

La résolution du Laplacien $\Delta\Phi=0$ dans le domaine ci-contre nécessite la définition de toutes les conditions de bords. En particulier, puisque une des frontières est mobile dans le temps (interface eau-vapeur), cette frontière sera supposée bien déterminée.

Les conditions de bord sont les suivantes :

$\Phi = 0 \qquad z = \ell$

$\Phi = \Phi_\Gamma \qquad \Gamma$: frontière eau-vapeur

$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad$ pour $x=0 \qquad \forall z$

$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad$ pour $x=A_1 \quad z \in C_\Gamma$

$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad$ pour $z=0 \qquad \forall x$

Ces conditions sont résumées sur le schéma ci-dessus.

Nous supposerons que (Γ) se compose de deux arcs de courbes — ce qui est le cas général.

La méthode adoptée pour résoudre $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$ (1) tient compte de la géométrie du canal. Nous faisons le changement de variables suivant :

$$\zeta = \frac{x}{A_1} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\zeta}$$

$$\omega = \frac{z}{\ell} \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\ell}\frac{\partial}{\partial\omega}$$

L'équation se transforme ainsi :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2} + \varepsilon\frac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2} = 0 \qquad (2)$$

avec $$\varepsilon = \frac{A_1^2}{\ell^2} \qquad (3)$$

En remarquant que $\varepsilon = \frac{(0,106)^2}{(60)^2} \simeq 3\ 10^{-6}$, nous cherchons Φ sous la forme d'un développement en ε

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\ \Phi_1 + \varepsilon^2\ \Phi_2 + \cdots \tag{4}$$

En limitant ce développement aux termes en ε (premier ordre), nous devons résoudre :

$$\frac{\partial^2\ \Phi_0}{\partial \zeta^2} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2\ \Phi_1}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2\ \Phi_0}{\partial \omega^2} = 0 \tag{6}$$

avec les conditions de bord définies pour Φ et qui doivent être reportées sur Φ_0 et Φ_1, indépendamment de ε. Ces conditions sont notifiées sur le schéma ci-dessous, compte tenu du changement de variables.

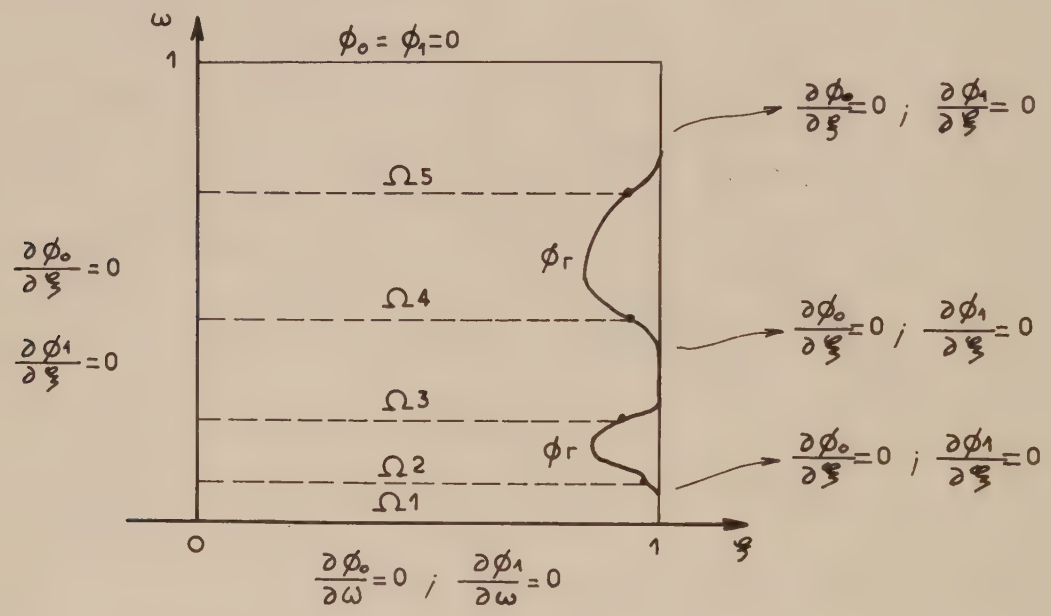

Figure VIII.2

Numériquement Γ est définie discrètement. En distinguant les points où il y a ébullition des autres, il existe dans notre cas cinq domaines Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 et Ω_5, où les conditions de bords sont différentes.

Intégrons d'abord l'équation (5) dans les domaines : Ω_1, Ω_3 et Ω_5

$$\frac{\partial\ \Phi_0}{\partial\ \xi} = f(\omega)$$

Dans ces domaines, les conditions $\frac{\partial\ \Phi_0}{\partial\ \xi} = 0$ pour $\xi = 0$ entraînent $f(\omega) = 0$

donc $\Phi_0 = \Phi_0(\omega)$ (7) qui vérifie bien $\frac{\partial\ \Phi_0}{\partial\ \xi} = 0$ pour $\xi = 1$

Intégrons dans Ω_2 et Ω_4 l'équation (6) pour chaque cote w_j le long de Γ qui est définie d'une manière discrète.

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = - \xi \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial w^2}(w_j) + f(w_j)$$

Pour $\xi = 0$ $\quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = 0 \quad$ donc $f(w_j) = 0$

$$\Phi_1 = - \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial w^2}(w_j) + g(w_j)$$

Le long de Γ, Φ est donné; la condition imposée est donc :

$$\Phi_\Gamma = \Phi_o + \varepsilon \Phi_1$$

Nous prendrons alors pour $\xi_j = \frac{X_j}{A_1}$ qui sont les coordonnées

$w_j = \frac{z_j}{\ell}$

d'un point de Γ

$$\Phi_1 = 0 \tag{8}$$

et

$$\Phi_o = \Phi_\Gamma \tag{9}$$

La condition (8) permet de déterminer $g(w_j)$

$$\Phi_1 (\xi_j, w_j) = - \frac{\xi_j^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial w^2}(w_j) + g(w_j) = 0$$

d'où l'expression de Φ_1 :

$$\Phi_1(\xi, w_j) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial w^2}(w_j) \left[\left(\frac{X_j}{A_1} \right)^2 - \xi^2 \right]$$

Dans Ω_2 et Ω_4 le potentiel s'écrit sous la forme :

$$\Phi(\xi, w_j) = \Phi_o(w_j) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial w^2}(w_j) \left[\left(\frac{X_j}{A_1} \right)^2 - \xi^2 \right] \tag{10}$$

avec $\Phi_o(w) = \Phi_\Gamma$

Il reste à déterminer dans Ω_1, Ω_3 et Ω_5 la fonction Φ_1 qui obéit à l'équation (6)

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial w^2} = 0$$

Φ_o ne dépend que de w et de plus, pour $\xi = 0$, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = 0$; ces conditions permettent d'écrire Φ_1 sous la forme :

$$\Phi_1 = - \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial w^2}(w) + g(w)$$

Les conditions $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = 0$ pour $\xi = 1$ donnent :

$$\frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial w^2}(w) = 0$$

Donc $\Phi_1 = \Phi_1(\omega)$ fonction de ω seul.

L'expression de Φ s'écrit :

$$\Phi = \Phi_o(\omega) + \varepsilon\, \Phi_1(\omega) \tag{12}$$

avec $$\frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial \omega^2}(\omega) = 0 \tag{13}$$

soit : $$\Phi = A\,\omega + B + \varepsilon\, \Phi_1(\omega) \tag{14}$$

Dans Ω_1, Φ ne dépend que de ω et doit se raccorder, à la limite de Ω_2, au premier point où il y a ébullition pour lequel, sur Γ, $\Phi_1=0$ et $\Phi=\Phi_o=\Phi_\Gamma$.

Il faut donc prendre $\Phi_1(\omega) \equiv 0$

soit $$\Phi = A\omega + B$$

mais la condition $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}=0$ pour $\omega=0$ donne

$$\Phi = B$$

Le potentiel est une constante qui n'est autre que $\Phi_o(\omega_{j_1})$, $\Phi_o(\omega_{j_1})$ étant la valeur de $\Phi_o=\Phi_\Gamma$ pour le premier point où il y a ébullition.

Dans Ω_1 : $$\Phi = \Phi_o(\omega_{j_1}) \tag{15}$$

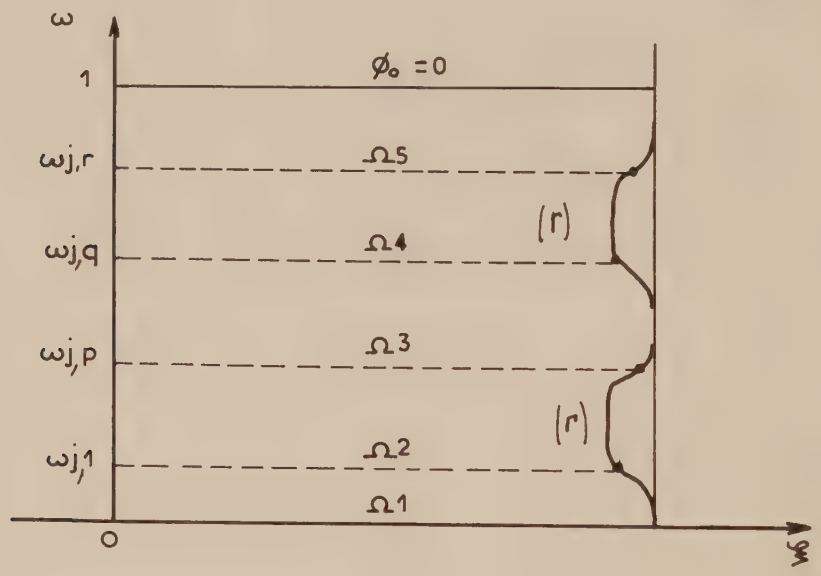

Figure VIII.3

Dans Ω_3, Φ ne dépend que de ω et doit se raccorder en deux points : le point de cote $\omega_{j,p}$ et le point de cote $\omega_{j,q}$ pour des valeurs de $\Phi_o=\Phi_\Gamma$, donc dans Ω_3, $\Phi_1 \equiv 0$, et les deux constantes A et B sont définies par les deux points de raccordement.

$$\Phi = \frac{\Phi_o(\omega_{jp}) - \Phi - (\omega_{jq})}{\omega_{jp} - \omega_{jq}} (\omega - \omega_{jp}) + \Phi_o(\omega_{jp}) \tag{16}$$

Dans Ω_s, Φ ne dépend aussi que de ω et doit se raccorder au dernier point où il y a ébullition, point de cote ω_{jr} pour lequel $\Phi=\Phi_o$.

Donc $\Phi_1 \equiv 0$ et les deux constantes A et B sont déterminées par la condition de raccordement au point ω_{jr} et par la condition $\Phi=0$ pour $\omega=1$

$$\Phi = \Phi_o(\omega_{jr}) \frac{\omega-1}{\omega_{jr}-1} \qquad (17)$$

Cette méthode de résolution de $\Delta\Phi=0$ ne tient cependant pas compte du problème de raccordement entre une condition de Dirichlet, et une condition de Neumann, au point où Γ est tangente à l'axe $x=A_1$. En un tel point M, on doit avoir :

$$\Phi = \Phi_\Gamma$$

et $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

C'est une difficulté qui nécessite des développements limités à deux dimensions au voisinage de M, que nous n'avons pas abordés, l'approche numérique adoptée semblant suffisante.

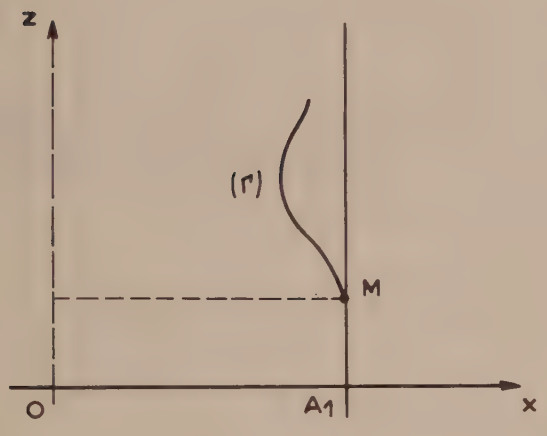

Figure VIII.4

ANNEXE IX

DISCRETISATION DE L'EQUATION DE CONVECTION DANS L'EAU LORSQU'IL Y A EBULLITION

Lorsqu'il existe pour chaque particule d'eau deux composantes de vitesses, l'équation qui donne les températures dans le demi-canal est une équation de convection.

$$\rho_3 \; c_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial t} + u \frac{\partial T_3}{\partial x} + w \frac{\partial T_3}{\partial z} \right) = \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}$$

équation dans laquelle la diffusion en z est négligée. La discrétisation de cette équation doit être faite en tenant compte des vitesses u et w, et de l'évolution de la paroi mobile d'abscisse X(z,t). Compte tenu du maillage en x, et en z, la discrétisation sera obtenue en faisant des bilans d'énergie dans les deux directions x et z.

1. - VARIATION D'ENERGIE ENTRE t, ET t+δt

Dans une tranche de cote j, on découpe en x en N+1 points, quel que soit t.

Le pas en x est donc : $\frac{X}{N}$.

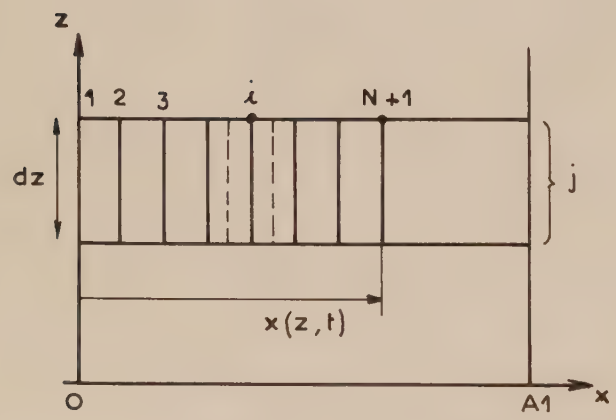

Figure IX.1

Désignons par X_1 la valeur de X à l'instant t et par X_2 la valeur de X à t+δt.

La variation d'énergie dans une tranche entourant le point d'indice i est égale à :

$$c_3 \; \rho_3 \; dz \left(\frac{X_2}{N} \; T^{n+1}_{i,j} - \frac{X_1}{N} \; T^{n}_{i,j} \right)$$

l'indice n correspondant à l'instant t,

l'indice n+1 correspondant à l'instant t+δt.

L'indice 3 caractérisant le demi-canal — milieu eau — a été omis dans la désignation de la température.

2. - VARIATION D'ENERGIE SUIVANT L'AXE DES x

Considérons la tranche d'eau entourant le point d'indice i, d'abscisse $(i-1)\frac{X}{N}$,

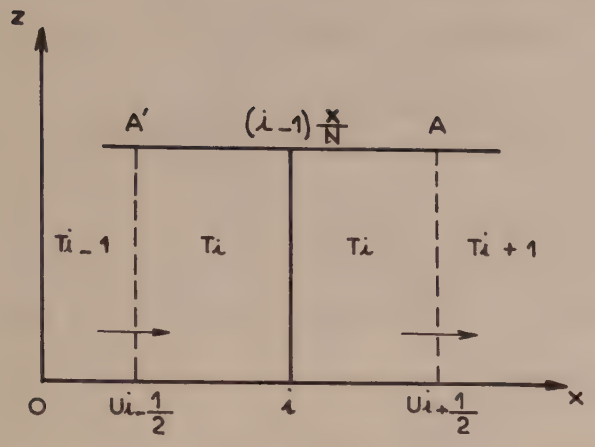

Figure IX.2

qui occupe à l'instant t la position A'A.

Les abscisses de ces points ont pour valeurs :

$$\overline{OA} = (i - \frac{1}{2}) \frac{X}{N}$$

$$\overline{OA'} = (i - \frac{3}{2}) \frac{X}{N}$$

Les températures dans chaque demi-tranche entourant le point d'abscisse $(i-1)\frac{X}{N}$ sont désignées par T_i. Les vitesses en A' et A sont désignées respectivement par $u_{i-\frac{1}{2}}$ et $u_{i+\frac{1}{2}}$. Elles seront supposées toutes les deux positives ce qui revient à dire que u_X est supposée positive, puisque comme nous l'avons vu dans le calcul des vitesses (chapitre III, paragraphe 4.3), u est une fonction linéaire de x :

$$u = \frac{x}{X} u_X$$

Pour faire le bilan d'énergie dans la tranche d'indice i, nous envisageons d'abord le mouvement de l'eau, avec grille fixée, puis nous tiendrons compte du déplacement de la grille.

a) Maillage fixe

A droite la maille i perd : $- \rho_3 c_3 dz u_{i+\frac{1}{2}} \delta t T_{i,j}^{n+1}$, à condition que la masse d'eau provienne de la maille i qui est à la température $T_{i,j}^{n+1}$, c'est-à-dire si :

$u_{i+\frac{1}{2}} \delta t < h = \frac{X}{N}$

à gauche la maille i récupère : $c_3 \rho_3 dz u_{i-\frac{1}{2}} \delta t T_{i-1,j}^{n+1}$ à condition que

$u_{i-\frac{1}{2}} \delta t < h = \frac{X}{N}$, inégalité qui est vérifiée puisque u est linéaire en x, et que l'on a supposé $u_{i+\frac{1}{2}} \delta t < h$.

b) Déplacement du maillage

Le point A, à l'instant $t+\delta t$, se déplace en B tel que :

$$\overline{AB} = (i - \frac{1}{2}) \frac{dX}{N}$$

De même, le point A' se déplace à l'instant $t+\delta t$ en B'

tel que : $\overline{A'B'} = (i - \frac{3}{2}) \frac{dX}{N}$

Nous supposerons d'abord $u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t < \overline{AB}$, ce qui implique $u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t < \overline{A'B'}$;

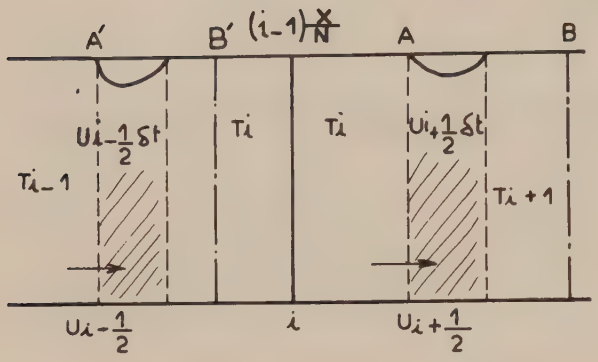

Figure IX.3

à droite la tranche i perd :

$-\,c_3\,\rho_3\,dz\,u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\,T^{n+1}_{i,j}$

mais récupère du fait du mouvement

$+\,c_3\,\rho_3\,dz\,u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\,T^{n+1}_{i,j}$.

Elle gagne en plus, grâce à ce mouvement $\rho_3\,c_3\,dz\,(\overline{AB} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t)\,T^{n+1}_{i+1,j}$ à condition que :

$$(\overline{AB} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t) < h$$

à gauche la tranche i gagne

$c_3\,\rho_3\,dz\,u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\,T^{n+1}_{i-1,j}$ mais perd du fait du mouvement $-\,c_3\,\rho_3\,dz\,u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\,T^{n+1}_{i-1,j}$. Elle perd en plus par ce même mouvement :

$-\,c_3\,\rho_3\,dz\,(\overline{A'B'} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t)\,T^{n+1}_{i,j}$ à condition que

$(\overline{A'B'} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t) < h$; mais cette condition est vérifiée puisque l'on a déjà $(\overline{AB} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t) < h$.

Supposons maintenant $u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t > \overline{AB}$, ce qui implique $u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t > \overline{A'B'}$;

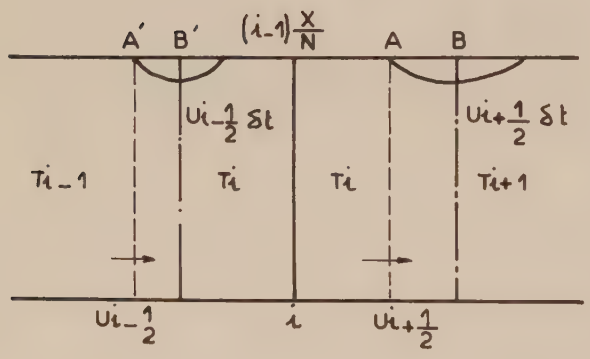

Figure IX.4

à droite la tranche i perd :

$-\,c_3\,\rho_3\,dz\,u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\,T^{n+1}_{i,j}$

et elle récupère, grâce au mouvement :

$c_3\,\rho_3\,dz\,\overline{AB}\,T^{n+1}_{i,j}$

d'où le bilan :

$c_3\,\rho_3\,dz\,(\overline{AB} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t)\,T^{n+1}_{i,j}$

à condition que :

$(u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t - \overline{AB}) < h$

à gauche la tranche i gagne :

$c_3\,\rho_3\,dz\,u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\,T^{n+1}_{i-1,j}$

et elle perd, grâce au mouvement :

$-\,c_3\,\rho_3\,dz\,\overline{A'B'}\,T^{n+1}_{i-1,j}$

d'où le bilan :

$-\,c_3\,\rho_3\,dz\,(\overline{A'B'} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t)\,T^{n+1}_{i-1,j}$

ceci à condition que $(u_{i-\frac{1}{2}}\ \delta t - \overline{A'B'}) < h$; mais cette condition est déjà réalisée puisque l'on a : $(u_{i+\frac{1}{2}}\ \delta t - \overline{AB}) < h$.

Lorsqu'il faut tenir compte du mouvement du maillage, ce sont les déplacements relatifs qui interviennent. Si le maillage est fixe, la condition de stabilité est :

$$\underset{(i)}{\text{Max}} \left| \left[u_{i+\frac{1}{2}}\ \delta t \right] \right| < h = \frac{X}{N}$$

soit : $u_X\ \delta t < \frac{X}{N}$ puisque l'on a supposé $u > 0$.

Le maillage étant mobile, la condition de stabilité est :

$$\underset{(i)}{\text{Max}} \left| u_{i+\frac{1}{2}}\ \delta t - \overline{AB} \right| < h = \frac{X}{N}$$

En exprimant : $\overline{AB} = (i-\frac{1}{2})\ \frac{dX}{N}$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = (i-\frac{1}{2})\ \frac{u_X}{N}$$

Nous obtenons :

$$\underset{(i)}{\text{Max}} \left| (i-\frac{1}{2})\ \frac{u_X}{N}\ \delta t - (i-\frac{1}{2})\ \frac{dX}{N} \right| = \underset{(i)}{\text{Max}}\ \frac{(i-\frac{1}{2})}{N} \left| u_X\ \delta t - dX \right| < \frac{X}{N}$$

Pour i=N $\quad \frac{N-\frac{1}{2}}{N} \left| u_X\ \delta t - dX \right| < \frac{X}{N}$

Condition qui sera réalisée en prenant $\left| u_X\ \delta t - dX \right| < \frac{X}{N}$

En réunissant les résultats obtenus, et en utilisant les fonctions f^+ et f^-, le bilan d'énergie dans la direction des x s'écrit :

$\alpha)$ $u_{i+\frac{1}{2}}\ \delta t > \overline{AB}$ qui correspond à : $u_X\ \delta t - dX > 0$

$$- c_3\ \rho_3\ dz \left[(i-\tfrac{1}{2})\ \frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\ \delta t \right]^- T^{n+1}_{i,j}$$

$$+ c_3\ \rho_3\ dz \left[(i-\tfrac{3}{2})\ \frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\ \delta t \right]^- T^{n+1}_{i-1,j}$$

$\beta)$ $u_{i+\frac{1}{2}}\ \delta t < \overline{AB}$ qui correspond à : $u_X\ \delta t - dX < 0$

$$c_3\ \rho_3\ dz \left[(i-\tfrac{1}{2})\ \frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\ \delta t \right]^+ T^{n+1}_{i+1,j}$$

$$- c_3\ \rho_3\ dz \left[(i-\tfrac{3}{2})\ \frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\ \delta t \right]^+ T^{n+1}_{i,j}$$

Rappelons les définitions des fonctions f^+ et f^-

$$f^+ = f \quad f \geqslant 0$$
$$= 0 \quad f < 0 \qquad\qquad f = f^+ - f^-$$

$$f^- = -f \quad f \leqslant 0$$
$$= 0 \quad f > 0$$

Finalement suivant le signe de $u_X\ \delta t - dX$ nous avons des fonctions différentes.

$u_X\ \delta t > dX$ fait intervenir les deux fonctions f^-

$u_X\ \delta t < dX$ fait intervenir les deux fonctions f^+

3. - VARIATION D'ENERGIE SUIVANT L'AXE DES z

Le bilan d'énergie suivant l'axe des z se fait en tenant compte du signe de $w_{i,j}$ et de $w_{i,j+1}$; il y a donc quatre cas possibles:

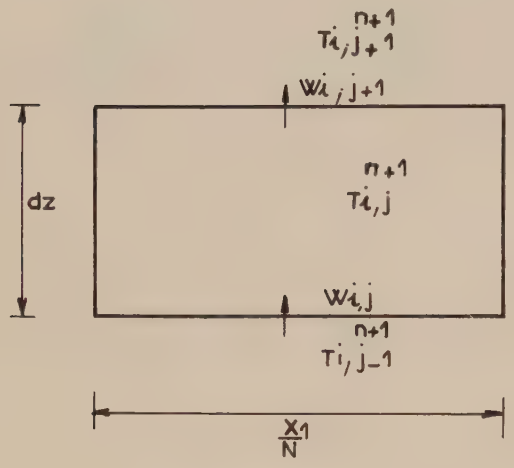

Figure IX.5

a) $w_{i,j} > 0$ et $w_{i,j+1} > 0$

$$c_3 \rho_3\ w_{i,j}\ \delta t\ \frac{X_1}{N}\ T^{n+1}_{i,j-1} - c_3 \rho_3\ w_{i,j+1}\ \delta t\ \frac{X_1}{N}\ T^{n+1}_{i,j}$$

b) $w_{i,j} > 0$ et $w_{i,j+1} < 0$

$$c_3 \rho_3\ w_{i,j}\ \delta t\ \frac{X_1}{N}\ T^{n+1}_{i,j-1} - c_3 \rho_3\ w_{i,j+1}\ \delta t\ \frac{X_1}{N}\ T^{n+1}_{i,j+1}$$

c) $w_{i,j} < 0$ et $w_{i,j+1} > 0$

$$c_3 \rho_3\ \frac{X_1}{N} \delta t\, w_{i,j}\ T^{n+1}_{i,j} - c_3\ \rho_3\ \frac{X_1}{N}\ \delta t\ w_{i,j+1}\ T^{n+1}_{i,j}$$

d) $w_{i,j} < 0$ et $w_{i,j+1} < 0$

$$c_3\ \rho_3\ \frac{X_1}{N}\ \delta t\ w_{i,j}\ T^{n+1}_{i,j} - c_3\ \rho_3\ \frac{X_1}{N}\ \delta t\ w_{i,j+1}\ T^{n+1}_{i,j+1}$$

En utilisant, comme précédemment, les fonctions f^+ et f^-, le bilan d'énergie suivant la direction z s'écrit ;

$$c_3\ \rho_3\ \frac{X_1}{N}\ \delta t \left[w^+_{i,j}\ T^{n+1}_{i,j-1} - w^+_{i,j+1}\ T^{n+1}_{i,j} + w^-_{i,j+1}\ T^{n+1}_{i,j+1} - w^-_{i,j}\ T^{n+1}_{i,j} \right]$$

4. - TERME DE DIFFUSION EN x

La chaleur diffuse des zones de hautes températures vers les zones de températures

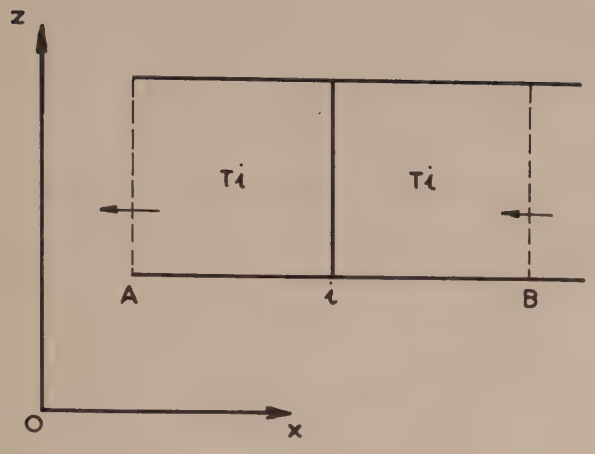

Figure IX.6

plus basses, donc dans le sens des x décroissants.

Le terme de diffusion s'écrit donc :

$$\lambda_3 \, dz \, \delta t \left[\frac{\partial T_3}{\partial x}(B) - \frac{\partial T_3}{\partial x}(A) \right]$$

$$= \lambda_3 \, dz \, \delta t \left[\frac{T^{n+1}_{i+1,j} - T^{n+1}_{i,j}}{\frac{X_1}{N}} - \frac{T^{n+1}_{i,j} - T^{n+1}_{i-1,j}}{\frac{X_1}{N}} \right]$$

5. - EQUATION DISCRETISEE

En rassemblant les différents résultats obtenus dans les paragraphes précédents, l'équation de convection sous forme discrétisée s'écrit ainsi :

$$\frac{X_2}{N} T^{n+1}_{i,j} - \frac{X_1}{N} T^{n}_{i,j} = a_3 \, \delta t \, \frac{N}{X_1} \left[T^{n+1}_{i+1,j} - 2T^{n+1}_{i,j} + T^{n+1}_{i-1,j} \right] - \left[(i - \tfrac{1}{2}) \frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}} \delta t \right]^{-} T^{n+1}_{i,j}$$

$$+ \left[(i - \tfrac{3}{2}) \frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}} \delta t \right]^{-} T^{n+1}_{i-1,j}$$

$$+ \left[(i - \tfrac{1}{2}) \frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}} \delta t \right]^{+} T^{n+1}_{i+1,j}$$

$$- \left[(i - \tfrac{3}{2}) \frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}} \delta t \right]^{+} T^{n+1}_{i,j}$$

$$+ \frac{X_1}{N} \frac{\delta t}{dz} \left[w^{+}_{i,j} \, T^{n+1}_{i,j-1} - w^{+}_{i,j+1} \, T^{n+1}_{i,j} + w^{-}_{i,j+1} \, T^{n+1}_{i,j+1} - w^{-}_{i,j} \, T^{n+1}_{i,j} \right] \quad (1)$$

équation qui a été obtenue en divisant par $c_3 \, \rho_3 \, dz$.

Nous allons maintenant transformer cette équation (1).

Le premier membre s'écrit :

$$\frac{X_2 - X_1}{N} T^{n+1}_{i,j} + \frac{X_1}{N} T^{n+1}_{i,j} - \frac{X_1}{N} T^{n}_{i,j} = \frac{X_1}{N} \left(T^{n+1}_{i,j} - T^{n}_{i,j} \right) + \frac{dX}{N} T^{n+1}_{i,j}$$

Le terme $\frac{dX}{N} T^{n+1}_{i,j}$ est écrit au second membre de (1) et sera groupé soit avec les fonctions f^{+}, soit avec les fonctions f^{-}.

a) Cas de deux fonctions f^+

$$\left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right]^+ T^{n+1}_{i+1,j} - \left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right]^+ T^{n+1}_{i,j} - \frac{dX}{N}\,T^{n+1}_{i,j}$$

s'écrit :

$$\left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right] T^{n+1}_{i+1,j} - \left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right] T^{n+1}_{i,j} - \frac{dX}{N}$$

$$= \left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right] T^{n+1}_{i+1,j} - \left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right] T^{n+1}_{i,j} \qquad (2)$$

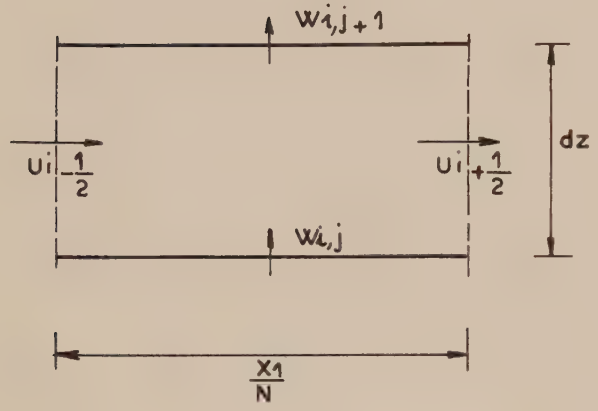

Figure IX.7

La conservation de la masse dans une cellule s'écrit numériquement

$$\rho_3\,dz\,u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t - \rho_3\,dz\,u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t + \rho_3\,\frac{X_1}{N}\,w_{i,j}\,\delta t - \rho_3\,\frac{X_1}{N}\,w_{i,j+1}\,\delta t = 0$$

ce qui donne la relation :

$$u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{X_1}{dz\,N}\,(w_{i,j+1} - w_{i,j}) \qquad (3)$$

Le second membre de (2) peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right]\left[T^{n+1}_{i+1,j} - T^{n+1}_{i,j}\right] + T^{n+1}_{i,j}\,\delta t\left[u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}\right]$$

et en tenant compte de (3)

$$\left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right]\left[T^{n+1}_{i+1,j} - T^{n+1}_{i,j}\right] + T^{n+1}_{i,j}\,\frac{\delta t}{dz}\,\frac{X_1}{N}\left(w_{i,j+1} - w_{i,j}\right) \qquad (4)$$

or $$w_{i,j+1} - w_{i,j} = w^+_{i,j+1} - w^-_{i,j+1} - w^+_{i,j} + w^-_{i,j}$$

En portant cette relation dans (4), on obtient des simplifications dans (1) avec le dernier terme de cette expression. L'équation (1) se transforme ainsi :

$$\frac{X_1}{N}\left(T^{n+1}_{i,j} - T^{n}_{i,j}\right) = a_3\,\delta t\,\frac{N}{X_1}\left[T^{n+1}_{i+1,j} - 2\,T^{n+1}_{i,j} + T^{n+1}_{i-1,j}\right]$$

$$+ \left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right]\left[T^{n+1}_{i+1,j} - T^{n+1}_{i,j}\right]$$

$$+ \frac{X_1}{N}\,\frac{\delta t}{dz}\left[w^+_{i,j}\left(T^{n+1}_{i,j-1} - T^{n+1}_{i,j}\right) + w^-_{i,j+1}\left(T^{n+1}_{i,j+1} - T^{n+1}_{i,j}\right)\right] \qquad (5)$$

b) Cas des deux fonctions f^-

$$-\left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right]^- T^{n+1}_{i,j} + \left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right]^- T^{n+1}_{i-1,j} - \frac{dX}{N}\,T^{n+1}_{i,j}$$

s'écrit :

$$\left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right] T^{n+1}_{i,j} - \left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right] T^{n+1}_{i-1,j} - \frac{dX}{N}\,T^{n+1}_{i,j}$$

$$= \left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right] T^{n+1}_{i,j} - \left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right] T^{n+1}_{i-1,j} \qquad (6)$$

Dans le second membre de cette équation on fait apparaître $u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}$ pour tenir compte de la conservation de la masse (3)

$$-\left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right]\left[T^{n+1}_{i-1,j} - T^{n+1}_{i,j}\right] + T^{n+1}_{i,j}\,\delta t\left[u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}\right]$$

d'où :
$$\left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right]\left[T^{n+1}_{i,j} - T^{n+1}_{i-1,j}\right] + T^{n+1}_{i,j}\,\frac{\delta t}{dz}\,\frac{X_1}{N}\left[w_{i,j+1} - w_{i,j}\right]$$

En écrivant : $w_{i,j+1} - w_{i,j} = w^{+}_{i,j+1} - w^{-}_{i,j+1} - w^{+}_{i,j} + w^{-}_{i,j}$ et en simplifiant avec le dernier terme de (1), l'équation (1) devient :

$$\frac{X_1}{N}\left(T^{n+1}_{i,j} - T^{n}_{i,j}\right) = a_3\,\delta t\,\frac{N}{X_1}\left[T^{n+1}_{i+1,j} - 2\,T^{n+1}_{i,j} + T^{n+1}_{i-1,j}\right]$$

$$+\left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right]\left[T^{n+1}_{i,j} - T^{n+1}_{i-1,j}\right]$$

$$+\frac{X_1}{N}\,\frac{\delta t}{dz}\left[w^{+}_{i,j}\left(T^{n+1}_{i,j-1} - T^{n+1}_{i,j}\right) + w^{-}_{i,j+1}\left(T^{n+1}_{i,j+1} - T^{n+1}_{i,j}\right)\right] \qquad (7)$$

L'équation de convection discrétisée s'écrit donc :

$$T^{n+1}_{i,j} - T^{n}_{i,j} = a_3\,\delta t\,\frac{N^2}{X^2}\left[T^{n+1}_{i+1,j} - 2\,T^{n+1}_{i,j} + T^{n+1}_{i-1,j}\right]$$

$$+\left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right]^{+}\left[T^{n+1}_{i+1,j} - T^{n+1}_{i,j}\right]\frac{N}{X}$$

$$-\left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right]^{-}\left[T^{n+1}_{i,j} - T^{n+1}_{i-1,j}\right]\frac{N}{X}$$

$$+\frac{\delta t}{dz}\left[w^{+}_{i,j}\left(T^{n+1}_{i,j-1} - T^{n+1}_{i,j}\right) + w^{-}_{i,j+1}\left(T^{n+1}_{i,j+1} - T^{n+1}_{i,j}\right)\right] \qquad (8)$$

pour $2 \leqslant i \leqslant N$

En tenant compte des expressions de vitesses :

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_X}{X}(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{X}{N} = \frac{u_X}{N}(i-\tfrac{1}{2})$$

$$u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_X}{X}(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{X}{N} = \frac{u_X}{N}(i-\tfrac{3}{2})$$

l'équation a la forme suivante :

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n} = a_3\ \delta t\ \frac{N^2}{X^2}\left[T_{i+1,j}^{n+1} - 2\,T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}\right]$$
$$+ \frac{(i-\frac{1}{2})}{X}\left(dX - u_X\ \delta t\right)^{+}\left(T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}\right)$$
$$- \frac{(i-\frac{3}{2})}{X}\left(dX - u_X\ \delta t\right)^{-}\left(T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}\right)$$
$$+ \frac{\delta t}{dz}\left[w_{i,j}^{+}\left(T_{i,j-1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}\right) + w_{i,j+1}^{-}\left(T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}\right)\right] \qquad (9)$$

$2 \leqslant i \leqslant N$

- : -

ANNEXE X

CONDITIONS LIMITES POUR LE CALCUL DE LA TEMPERATURE DANS L'EAU LORSQU'IL Y A EBULLITION

1. - CONDITION SUR L'AXE DE SYMETRIE DU CANAL x=0 (i=1)

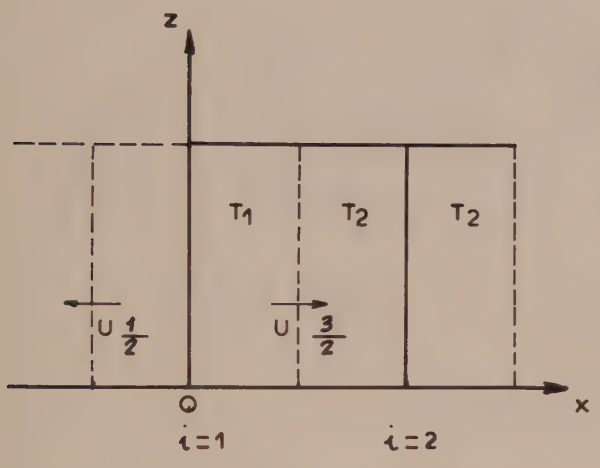

Figure X.1

Cette condition de symétrie s'obtient directement à partir de la formule générale en écrivant :

$$T_{i+1} = T_{i-1} \qquad \text{pour } i=1$$

$$u_{\frac{3}{2}} = - u_{\frac{1}{2}}$$

puisque pour x=0 la température passe par un extremum et la composante horizontale de la vitesse u est nulle.

En se reportant à la formule (8) de l'Annexe IX, cette relation se modifie ainsi:

$$T^{n+1}_{1,j} - T^{n}_{1,j} = a_3 \, \delta t \, \frac{N^2}{X^2} \left[2\, T^{n+1}_{2,j} - 2\, T^{n+1}_{1,j} \right]$$

$$+ \left[\frac{dX}{2N} - u_{3/2}\, \delta t \right]^{+} \left[T^{n+1}_{2,j} - T^{n+1}_{1,j} \right] \frac{N}{X}$$

$$- \left[- \frac{dX}{2N} + u_{3/2}\, \delta t \right]^{-} \left[T^{n+1}_{1,j} - T^{n+1}_{2,j} \right] \frac{N}{X}$$

$$+ \frac{\delta t}{dz} \left[w^{+}_{1,j} \left(T^{n+1}_{1,j-1} - T^{n+1}_{1,j} \right) + w^{-}_{1,j} \left(T^{n+1}_{1,j+1} - T^{n+1}_{1,j} \right) \right]$$

a) $\frac{dX}{2N} - u_{3/2}\, \delta t > 0$

$$\left[\frac{dX}{2N} - u_{3/2}\, \delta t \right]^{+} = \frac{dX}{2N} - u_{3/2}\, \delta t$$

$$\left[- \frac{dX}{2N} + u_{3/2}\, \delta t \right]^{-} = \frac{dX}{2N} - u_{3/2}\, \delta t$$

b) $\frac{dX}{2N} - u_{3/2}\,\delta t < 0$

$$\left[\frac{dX}{2N} - u_{3/2}\,\delta t\right]^{+} = 0$$

$$\left[-\frac{dX}{2N} + u_{3/2}\,\delta t\right]^{-} = 0$$

Finalement la condition limite pour x=0 s'écrit :

$$T^{n+1}_{1,j} - T^{n}_{1,j} = 2a_3\,\delta t\,\frac{N^2}{X^2}\left[T^{n+1}_{2,j} - T^{n+1}_{1,j}\right] + \left[\frac{dX}{2N} - u_{3/2}\,\delta t\right]^{+}\frac{2N}{X}\left(T^{n+1}_{2,j} - T^{n+1}_{1,j}\right)$$
$$+ \frac{\delta t}{dz}\left[w^{+}_{1,j}\left(T^{n+1}_{1,j-1} - T^{n+1}_{1,j}\right) + w^{-}_{1,j+1}\left(T^{n+1}_{1,j+1} - T^{n+1}_{1,j}\right)\right] \qquad (1)$$

En tenant compte de la linéarité en x de u

$$u_{3/2} = \frac{u_X}{2N}$$

$$\left[\frac{dX}{2N} - u_{3/2}\,\delta t\right]^{+} = \left[\frac{dX}{2N} - \frac{u_X}{2N}\,\delta t\right]^{+} = \frac{1}{2N}\left[dX - u_X\,\delta t\right]^{+}$$

la condition pour x=0 devient :

$$T^{n+1}_{1,j} - T^{n}_{1,j} = 2a_3\,\delta t\,\frac{N^2}{X^2}\left[T^{n+1}_{2,j} - T^{n+1}_{1,j}\right] + \frac{1}{X}\left[dX - u_X\,\delta t\right]^{+}\left(T^{n+1}_{2,j} - T^{n+1}_{1,j}\right)$$
$$+ \frac{\delta t}{dz}\left[w^{+}_{1,j}\left(T^{n+1}_{1,j-1} - T^{n+1}_{1,j}\right) + w^{-}_{1,j+1}\left(T^{n+1}_{1,j+1} - T^{n+1}_{1,j}\right)\right] \qquad (2)$$

2. - <u>CONDITION A LA LIMITE VAPEUR-EAU x=X</u> (i = N+1)

L'équation générale obtenue en Annexe IX sous la forme (7) permet d'obtenir cette condition limite à la frontière vapeur-eau. Cette équation (7) peut s'écrire de la façon suivante :

$$h\left[T^{n+1}_{i,j} - T^{n}_{i,j}\right] = a_3\,\delta t\left[\frac{\partial T_3}{\partial x}(X) - \frac{T^{n+1}_{i,j} - T^{n+1}_{i-1,j}}{h}\right]$$
$$- \left[(i-\tfrac{3}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i-\frac{1}{2}}\,\delta t\right]^{-}\left[T^{n+1}_{i,j} - T^{n+1}_{i-1,j}\right]$$
$$+ \left[(i-\tfrac{1}{2})\,\frac{dX}{N} - u_{i+\frac{1}{2}}\,\delta t\right]^{+}\left[T^{n+1}_{i+1,j} - T^{n+1}_{i,j}\right]$$
$$+ h\frac{\delta t}{dz}\left[w^{+}_{i,j}\left(T^{n+1}_{i,j-1} - T^{n+1}_{i,j}\right) + w^{-}_{i,j+1}\left(T^{n+1}_{i,j+1} - T^{n+1}_{i,j}\right)\right]$$

en mettant en évidence le flux pour x=X.

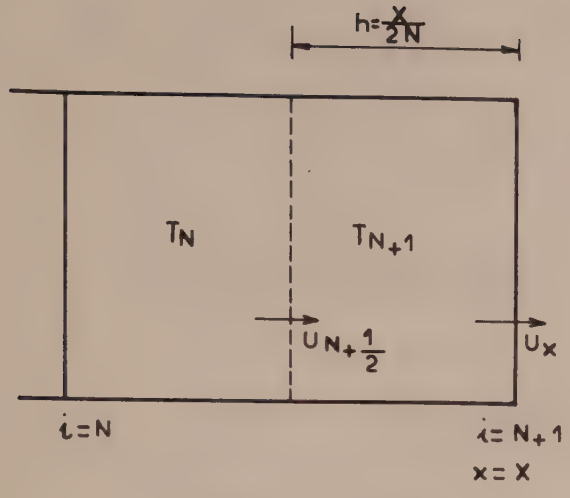

Figure X.2

En faisant $T_i = T_{i+1}$ pour i = N+1

et $h = \frac{X}{2N}$

on obtient :

$$\frac{X}{2N}\left[T^{n+1}_{N+1,j} - T^{n}_{N+1,j}\right] = a_3\ \delta t\left[\frac{\partial T_3}{\partial x}(X) - \frac{T^{n+1}_{N+1,j} - T^{n+1}_{N,j}}{\frac{X}{2N}}\right] - \left[(N-\tfrac{1}{2})\frac{dX}{N} - u_{N+\frac{1}{2}}\,\delta t\right]^{-}$$

$$\left[T^{n+1}_{N+1,j} - T^{n+1}_{N,j}\right] + \frac{X}{2N}\frac{\delta t}{dz}\left[w^{+}_{N+1,j}\left(T^{n+1}_{N+1,j-1} - T^{n+1}_{N+1,j}\right) + w^{-}_{N+1,j+1}\left(T^{n+1}_{N+1,j+1} - T^{n+1}_{N+1,j}\right)\right]$$

En exprimant $u_{N+\frac{1}{2}} = (N-\frac{1}{2})\frac{u_X}{N}$, la condition s'écrit :

$$T^{n+1}_{N+1,j}\ T^{n}_{N+1,j} = a_3\ \delta t\ \frac{2N}{X}\frac{\partial T_3}{\partial x}(X) - a_3\ \delta t\ \frac{2N^2}{X^2}\left(T^{n+1}_{N+1,j} - T^{n+1}_{N,j}\right) - \frac{(N-\frac{1}{2})}{N}\left[dX - u_X\,\delta t\right]^{-}\left[T^{n+1}_{N+1,j} - T^{n+1}_{N,j}\right]\frac{2N}{X} + \frac{\delta t}{dz}\left[w^{+}_{N+1,j}\left(T^{n+1}_{N+1,j-1} - T^{n+1}_{N+1,j}\right) + w^{-}_{N+1,j+1}\left(T^{n+1}_{N+1,j+1} - T^{n+1}_{N+1,j}\right)\right] \qquad (3)$$

Equation qui détermine en fait T_s car $T_{N+1} = T_{N+2} = T_s$.

ANNEXE XI

CONDITIONS DE TRANSFERT D'ENERGIE EN A_1 LORSQU'IL Y A PERTURBATION

1. - COTE OU IL Y A EBULLITION AVEC MICROCOUCHE D'EAU ($e \neq 0$, $X < A_1$)

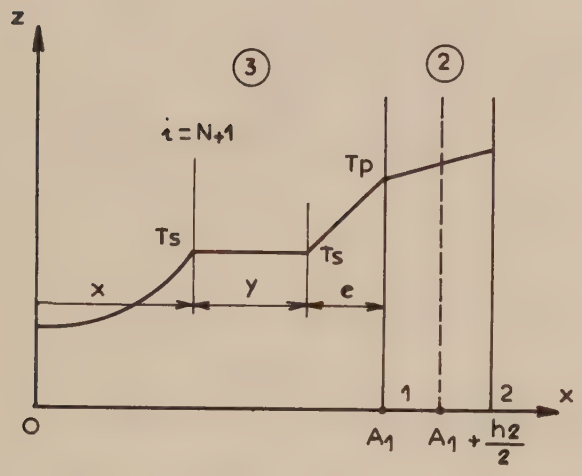

Figure XI.1

Les deux conditions à exprimer sont les suivantes :

a) $$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) = \lambda_3 \frac{T_p - T_s}{e} \qquad (1)$$

b) $$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) - \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) = c_p \rho_v y \frac{\partial T_s}{\partial t} + \left(\mathcal{L} - \frac{k_p}{\rho_v}\right) \frac{\partial}{\partial t}(\rho_v y) + k_p \frac{\partial y}{\partial t} \qquad (2)$$

La relation (2) s'écrit encore (cf. Annexe VII)

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) - \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) = y \rho_v \frac{\partial T_s}{\partial t}\left[c_p + \left(\frac{a}{T_s} - 1\right)\left(\frac{\mathcal{L}}{T_s} - \frac{kR}{M} + \frac{\mathcal{L}}{T_s}\frac{\rho_v}{\rho_3 - \rho_v}\right)\right] - \frac{\mathcal{L}\,\rho_3\,\rho_v\,u_X}{\rho_3 - \rho_v} \qquad (3)$$

La discrétisation des températures dans la demi-tranche du milieu 2 permet d'écrire :

$$\frac{T_p^{n+1} - T_p^n}{\delta t} = \frac{2a_2}{h_2}\left[\frac{\partial T_2}{\partial x}\left(A_1 + \frac{h_2}{2}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1)\right]$$

soit :

$$\frac{T_p^{n+1} - T_p^n}{\delta t} = \frac{2a_2}{h_2}\left[\frac{T_{2,2}^{n+1} - T_p^{n+1}}{h_2}\right] - \frac{2a_2}{h_2}\frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1)$$

En tenant compte de (1), la première condition s'exprime par la relation :

$$T_p^{n+1} - T_p^n = \frac{2a_2}{h_2^2}\delta t\left[T_{2,2}^{n+1} - T_p^{n+1}\right] - \frac{2a_2}{h_2}\frac{\delta t}{e^n}\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(T_p^{n+1} - T_s^{n+1}\right) \qquad (4)$$

équation dans laquelle e est pris à l'instant t (indice n).

Puisque l'ébullition a été détectée ou existe à l'instant t (indice n), à la cote j, l'équation discrétisée des températures pour i = N+1 s'écrit :

$$T_s^{n+1} - T_s^n = 2a_3\ \delta t\ \frac{N}{X^n}\frac{\partial T_3}{\partial x}(X) - 2a_3\ \delta t\ \frac{N^2}{(X^n)^2}\left(T_s^{n+1} - T_N^{n+1}\right)$$

$$- \frac{(2N-1)}{X^n}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^-\left(T_s^{n+1} - T_N^{n+1}\right)$$

$$+ \frac{\delta t}{dz}\left[w^{+n}_{N+1,j}\left(T^n_{N+1,j-1} - T^n_{s,j}\right) + w^{-n}_{N+1,j+1}\left(T^n_{N+1,j+1} - T^n_{s,j}\right)\right] \qquad (5)$$

Nous devons éliminer $\frac{\partial T_3}{\partial x}(X)$ entre l'équation (3) et l'équation (5).

Posons :

$$Z_1 = y^n\ \rho_v^n\left[c_p + \left(\frac{a}{T_s^n} - 1\right)\left(\frac{\mathcal{L}\rho_3}{T_s^n\ (\rho_3 - \rho_v^n)} - \frac{k\ R}{M}\right)\right]$$

$$Z_2 = \frac{\mathcal{L}\rho_3\ \rho_v^n\ u_X^n}{\rho_3 - \rho_v^n}$$

$$Z_3 = \frac{\delta t}{dz}\left[w^{+n}_{N+1,j}\left(T^n_{N+1,j-1} - T^n_{s,j}\right) + w^{-n}_{N+1,j+1}\left(T^n_{N+1,j+1} - T^n_{s,j}\right)\right]$$

$$Z_4 = 2a_3\ \delta t\ \frac{N^2}{(X^n)^2} + \frac{(2\ N-1)}{X^n}\left[dX - u_X^n\ \delta t\right]^-$$

Dans la définition de Z_3, $T^n_{N+1,j-1}$ peut désigner soit $T^n_{p,j-1}$ s'il n'y a pas ébullition à l'instant t (indice n), soit $T^n_{s,j-1}$ s'il y a ébullition à l'instant t.

Il en est de même pour $T^n_{N+1,j+1}$ qui peut désigner soit $T^n_{p,j+1}$, soit $T^n_{s,j+1}$.

En tenant compte de (1), les équations (3) et (5) deviennent :

$$\frac{\lambda_3}{e^n}\left(T_p^{n+1} - T_s^{n+1}\right) - \lambda_3\frac{\partial T_3}{\partial x}(X) = \frac{T_s^{n+1} - T_s^n}{\delta t}Z_1 - Z_2$$

$$T_s^{n+1} - T_s^n = \frac{2a_3}{\lambda_3}\ \delta t\ \frac{N}{X^n}\lambda_3\frac{\partial T_3}{\partial x}(X) - \left(T_s^{n+1} - T_N^{n+1}\right)Z_4 + Z_3$$

L'élimination de $\frac{\partial T_3}{\partial x}(X)$ conduit au résultat suivant :

$$-\frac{2a_3\ \delta t\ N}{e^n\ X^n}\left(T_p^{n+1} - T_s^{n+1}\right) + \left(T_s^{n+1} - T_s^n\right) = -\frac{2a_3}{\lambda_3}\frac{N}{X^n}Z_1\left(T_s^{n+1} - T_s^n\right)$$

$$+ \frac{2a_3}{\lambda_3}\delta t\ \frac{N}{X^n}Z_2 - \left(T_s^{n+1} - T_N^{n+1}\right)Z_4 + Z_3 \qquad (6)$$

Les deux conditions imposées en A_1, lorsqu'il y a ébullition avec microcouche d'eau, s'expriment par les deux relations suivantes :

$$- Z_4\ X^n\ e^n\ T_N^{n+1} + \left[2a_3\ \delta t\ N + X^n\ e^n\ (1+Z_4) + \frac{2a_3}{\lambda_3}\ N\ e^n\ Z_1\right] T_s^{n+1} - 2a_3\ \delta t\ N\ T_p^{n+1}$$

$$= T_s^n \left(X^n\ e^n + \frac{2a_3}{\lambda_3}\ N\ e^n\ Z_1\right) + \frac{2a_3}{\lambda_3}\ \delta t\ N\ e^n\ Z_2 + Z_3\ X^n\ e^n \qquad (7)$$

$$- \frac{2a_2}{h_2}\ \delta t\ \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\ T_s^{n+1} + \left[e^n \left(1 + \frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\right) + \frac{2a_2\ \delta t}{h_2}\ \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right] T_p^{n+1} - \frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\ e^n\ T_{2,2}^{n+1} = T_p^n\ e^n \qquad (8)$$

2. - COTE OU IL Y A EBULLITION SANS MICROCOUCHE D'EAU (e=0, $X < A_1$)

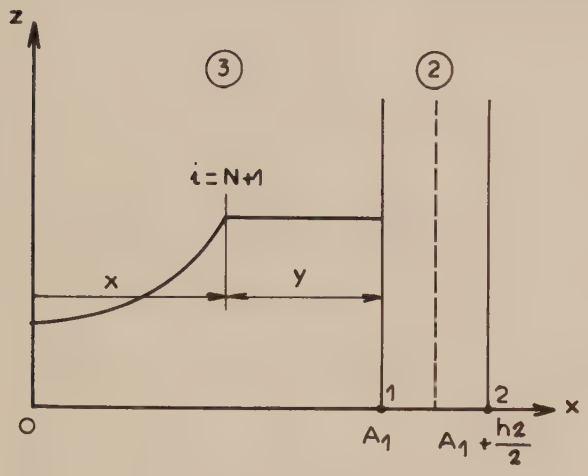

Figure XI.2

Les deux conditions à exprimer sont les suivantes :

$$a)\ \frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) = 0 \qquad (9)$$

$$b)\ - \lambda_3\ \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) = y\ \rho_v\ \frac{\partial T_s}{\partial t}\left[c_p + \left(\frac{a}{T_s} - 1\right)\left(\frac{\mathcal{L}}{T_s} - \frac{k\ R}{M} + \frac{\mathcal{L}}{T_s}\ \frac{\rho_v}{\rho_3 - \rho_v}\right)\right] - \frac{\mathcal{L}\ \rho_3\ \rho_v\ u_X}{\rho_3 - \rho_v} \qquad (10)$$

La plus simple de ces conditions, (9), s'exprime par :

$$T_p^{n+1} - T_p^n = \frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\left[T_{2,2}^{n+1} - T_p^{n+1}\right] \qquad (11)$$

Pour i=N+1 avec les notations adoptées, l'équation discrétisée des températures dans l'eau s'écrit :

$$T_s^{n+1} - T_s^n = \frac{2a_3\ \delta t}{\lambda_3}\ \frac{N}{X^n}\ \lambda_3\ \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) - \left(T_s^{n+1} - T_N^{n+1}\right) Z_4 + Z_3$$

La relation (10) peut encore prendre la forme :

$$- \lambda_3\ \frac{\partial T_3}{\partial x}(X) = \frac{T_s^{n+1} - T_s^n}{\delta t}\ Z_1 - Z_2$$

L'élimination de $\frac{\partial T_3}{\partial x}(X)$ donne :

$$T_s^{n+1} - T_s^n = - \frac{2a_3}{\lambda_3}\ N\ \frac{Z_1}{X^n}\left(T_s^{n+1} - T_s^n\right) + \frac{2a_3\ \delta t}{\lambda_3}\ \frac{N}{X^n}\ Z_2 - \left(T_s^{n+1} - T_N^{n+1}\right) Z_4 + Z_3 \qquad (12)$$

Lorsqu'il y a ébullition sans microcouche d'eau, les deux conditions imposées en A_1 s'expriment par les relations suivantes :

$$- Z_4\ T_N^{n+1} + \left(1 + \frac{2a_3\ N\ Z_1}{\lambda_3\ X^n} + Z_4\right) T_s^{n+1} = T_s^n \left(1 + \frac{2a_3\ N\ Z_1}{\lambda_3\ X^n}\right) + \frac{2a_3\ \delta t}{\lambda_3}\ \frac{N}{X^n}\ Z_2 + Z_3 \qquad (13)$$

$$T_p^{n+1}\left(1+\frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\right)-\frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\ T_{2,2}^{n+1}=T_p^n \qquad (14)$$

3. - COTE OU IL N'Y A PAS EBULLITION ($X=A_1$)

Puisque l'eau est en contact avec la plaque, la seule condition à exprimer est l'égalité des flux calorifiques. (La condition d'égalité des températures est implicite)

$$\lambda_3\frac{\partial T_3}{\partial x}(A_1)=\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1) \qquad (15)$$

La discrétisation des températures dans le milieu 2 donne :

$$\frac{T_p^{n+1}-T_p^n}{\delta t}=\frac{2a_2}{h_2}\left[\frac{\partial T_2}{\partial x}\left(A_1+\frac{h_2}{2}\right)-\frac{\partial T_2}{\partial x}(A_1)\right]$$

La discrétisation des températures dans l'eau pour $x=A_1$ permet d'écrire :

$$T_p^{n+1}-T_{N+1}^n=2a_3\ \delta t\ \frac{N}{A_1}\frac{\partial T_3}{\partial x}(A_1)-2a_3\ \delta t\ \frac{N^2}{A_1^2}\ T_p^{n+1}-T_N^{n+1}+Z_3$$

La condition (15) s'exprime donc par la relation :

$$\left(T_p^{n+1}-T_{N+1}^n\right)\frac{a_2}{h_2\lambda_2}+\left(T_p^{n+1}-T_p^n\right)\frac{a_3\ N}{\lambda_3\ A_1}=-2a_3\ \delta t\ \frac{N^2}{A_1^2}\frac{a_2}{h_2\ \lambda_2}\left(T_p^{n+1}-T_N^{n+1}\right)$$
$$+\frac{Z_3\ a_2}{h_2\ \lambda_2}+\frac{2a_2\ \delta t}{h_2^2}\frac{a_3\ N}{\lambda_3\ A_1}\left(T_{2,2}^{n+1}-T_{2,1}^{n+1}\right)$$

que l'on écrit sous la forme suivante en tenant compte de $T_{2,1}^{n+1}=T_p^{n+1}$

$$-\frac{2a_2\ a_3\ \delta t\ N^2}{A_1^2\ h_2\ \lambda_2}\ T_N^{n+1}+\left(\frac{a_2}{h_2\ \lambda_2}+\frac{a_3\ N}{\lambda_3\ A_1}+\frac{2a_2\ a_3\ \delta t\ N^2}{A_1^2\ h_2\ \lambda_2}+\frac{2a_2\ a_3\ \delta t\ N}{h_2^2\ \lambda_3\ A_1}\right)T_p^{n+1}$$
$$-\frac{2a_2\ a_3\ \delta t}{h_2^2\ \lambda_3\ A_1}\ T_{2,2}^{n+1}=T_{N+1}^n\frac{a_2}{h_2\ \lambda_2}+\frac{a_3\ N}{\lambda_3\ A_1}\ T_p^n+\frac{Z_3\ a_2}{h_2\ \lambda_2} \qquad (16)$$

Dans cette relation Z_3 a la signification suivante :

$$Z_3=\frac{\delta t}{dz}\left[w_{N+1,j}^{+n}\left(T_{N+1,j-1}^n-T_{N+1,j}^n\right)+w_{N+1,j+1}^{-n}\left(T_{N+1,j+1}^n-T_{N+1,j}^n\right)\right]$$

Cependant $T_{N+1,j}^n$ peut désigner soit $T_{p,j}^n$ s'il n'y a pas ébullition à l'instant t (indice n) à la cote j, soit $T_{s,j}^n$ s'il y a ébullition à l'instant t, à la cote j. Il en est de même des températures $T_{N+1,j-1}^n$ et $T_{N+1,j+1}^n$ qui peuvent désigner soit $T_{p,j-1}^n$ et $T_{p,j+1}^n$ soit $T_{s,j-1}^n$ et $T_{s,j+1}^n$.

ANNEXE XII

NOUVEAU CALCUL DES VITESSES w, LORSQU'IL Y A PERTURBATION

Ce calcul est une approximation différente, compte tenu du maillage en z. Nous considérons que pour chaque tranche j, w est constant en x, ce qui est conforme aux résultats obtenus par la formule (52) du chapitre III.

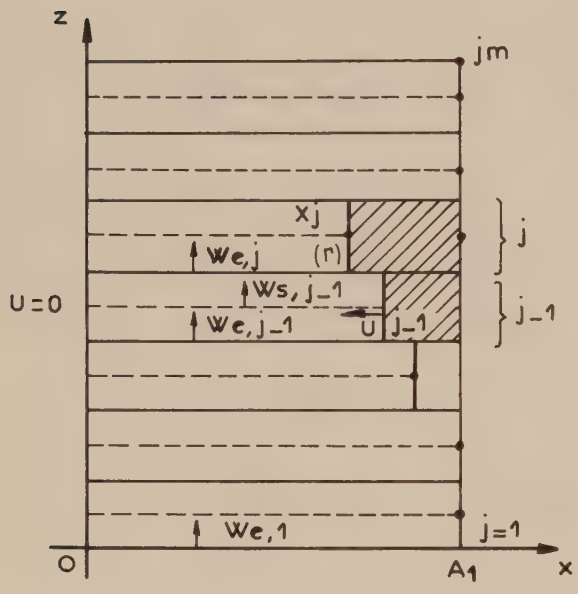

Figure XII.1

Nous définissons sur chaque interface une vitesse verticale de sortie et une vitesse verticale d'entrée, notées respectivement $w_{s,j-1}$ et $w_{e,j}$ pour l'interface entre la tranche j et la tranche j-1.

Sur l'interface nous écrirons la conservation des débits :

$$w_{e,j} X_j = w_{s,j-1} \cdot X_{j-1} \qquad (1)$$

Exprimons la conservation de la masse dans la tranche j-1

$$w_{e,j-1} X_{j-1} - w_{s,j-1} X_{j-1} - u_{j-1} dz = 0 \qquad (2)$$

relation dans laquelle u_{j-1} désigne la vitesse horizontale sur Γ, frontière eau-vapeur. En tenant compte de (1), l'équation (2) s'écrit :

$$w_{e,j-1} X_{j-1} - w_{e,j} X_j - u_{j-1} dz = 0$$

relation qui permet de calculer $w_{e,j}$:

$$w_{e,j} = \frac{X_{j-1}}{X_j} \left[w_{e,j-1} - \frac{u_{j-1}}{X_{j-1}} dz \right] \qquad (3)$$

Cette équation permet de déterminer $w_{e,j}$ de proche en proche car u_{j-1} est connu par la relation

$$u = - X \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial z^2}$$

Φ_o est la valeur du potentiel à l'interface eau-vapeur, qui est connue.

$$w_{e,j} = \frac{X_{j-1}}{X_j}\left[w_{e,j-1} + \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial z^2}{}_{,j-1}\, dz\right] \qquad (4)$$

avec $$w_{e,1} = 0 \qquad (5)$$

Comparons cette nouvelle méthode de calcul des w à celle qui découle de l'hypothèse $\Delta\Phi = 0$. Dire que le Laplacien est nul est équivalent à exprimer les deux relations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$

La relation (6) exprime la conservation de la masse (équation de continuité). De plus, nous avons trouvé que u était une fonction linéaire de x.

$$u = \frac{x}{X} u_X$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_X}{X}$$

En discrétisant l'équation (6) nous obtenons :

$$dw = -\frac{u_X}{X}\, dz$$

$$w_{s,j} - w_{e,j} = -\frac{u_j}{X_j}\, dz \qquad (8)$$

où u_j désigne la vitesse horizontale sur la frontière eau-vapeur. Cette relation n'est rien d'autre que la relation (2), compte tenu des notations prises.

Nous avons signalé que w dépendait peu de x; la relation (7) s'écrit donc :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Soit en discrétisant :

$$\frac{x\, u_j}{X_j} - x\,\frac{u_{j-1}}{X_{j-1}} = 0 \qquad (x \neq 0)$$

$$\frac{u_j}{X_j} = \frac{u_{j-1}}{X_{j-1}} \qquad (9)$$

En tenant compte de (8) équation de conservation de la masse :

$$w_{s,j} - w_{e,j} = w_{s,j-1} - w_{e,j-1} \qquad (10)$$

Dans l'hypothèse $\Delta\Phi = 0$ $\quad w_{e,j} = w_{s,j-1}$; $\quad w_{s,j} - w_{e,j} = w_{e,j} - w_{e,j-1}$

En remplaçant $w_{s,j}$ par sa valeur tirée de (8)

$$-\frac{u_j}{X_j}\, dz = w_{e,j} - w_{e,j-1}$$

et l'équation (9) permet d'écrire

$$- \frac{u_{j-1}}{X_{j-1}} dz = w_{e,j} - w_{e,j-1}$$

d'où :

$$w_{e,j} = w_{e,j-1} - \frac{u_{j-1}}{X_{j-1}} dz \qquad (11)$$

La comparaison des deux calculs montre qu'ils sont peu différents si $\frac{X_{j-1}}{X_j}$ est voisin de 1, comme l'indiquent les relations (3) et (11).

La nouvelle méthode de calcul des w conserve bien l'équation de masse (div $\vec{V}$=0), mais ne vérifie que d'une manière approchée $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ donc $\Delta\Phi$=0. C'est une autre façon d'assurer le couplage en z, qui est une méthode voisine de la première ($\Delta\Phi$=0).

Imprimé
par le Bureau de Documentation
C.E.N./CADARACHE